

STATO LIQUIDO - FLUIDO

(1)

Oggi giorno sappiamo che la materia è costituita da particelle di varie nature (sub-nucleari) le quali si mettono insieme a formare particelle composte, ^{atomi e molecole}.

D'altra parte ~~sappiamo~~ sappiamo che i sistemi fisici "macroscopici" sono di dimensioni molto più grandi di quelle caratteristiche di tali particelle ^{composte}, ~~obbediscono~~ alle leggi della Termodinamica una disciplina che nasce con le rivoluzioni newtoniane (1760), prima che l'ipotesi atomica di Democrito, prima e poi, fosse verificata e universalmente accettata.

Inoltre alla Termodinamica, ~~vennero anche sviluppate~~ che ~~per~~ si occupa principalmente di sistemi all'equilibrio o di processi trasformazioni (reversibili o meno) ~~ma~~ e quindi di legare i loro stati iniziali e finali, vennero anche sviluppate discipline che invece si occupano di descrivere le dinamiche di tali sistemi, considerati come dei campi continui, come pure per conoscere della natura atomistica, ma locali come nei quali esiste una dipendenza dalle grandezze nello spazio e nel tempo delle variabili ^{che possono essere finite} ~~locali~~ del sistema.

Queste discipline si occupano specificamente delle dinamiche dei solidi ^e delle dinamiche dei fluidi (liquidi o gas), ^{e sono basate, del}

~~si utilizzano~~ molto di volte teorico, sull'uso di EDP ottenute

Rimangono tuttavia per la natura, delle teorie ~~base~~ ^{dei principi} di fenomenologiche (come la Termodinamica), come che esprimono ~~le~~ i comportamenti di interesse in termini di alcune grandezze, detti coefficienti materiali (come ~~le~~ ^{la} cui valore dipende dalla specifica sostanza in esame) che

16

che non possono essere ricavati all'interno delle
teorie stesse, né devono errare, od ottenuti con misure
sperimentali, oppure ricavati, a partire da una teoria
microscopica della materia.

Una teoria microscopica della materia è quella teoria, che,
assegnate le ^{leggi di} interazioni tra i costituenti della materia, è
capace di ricavare il comportamento macroscopico
della materia. Una tale teoria è fornita dalla Meccanica
Statistica che affrontate più in là nel corso di studi.

~~La parte come una si occupa di derivare le leggi del
comportamento macroscopico dalle leggi microscopiche.~~

In questo corso ci occuperemo essenzialmente di studiare
il comportamento macroscopico e locale di fluidi.

~~Nella prima parte del corso definiremo~~

Il corso è diviso in 2 parti (e 2 docenti), ~~prima~~ una
prima parte in cui si derivano le leggi della statica
e della dinamica dei fluidi, una seconda parte in
cui si studiano fenomeni particolari legati all'atmosfera e
all'oceanografia come introdurre alle LS in quelle discipline.

La prima parte del corso è a sua volta divisa in due parti, la prima
in cui si approfondiscono concetti di Termodinamica dai sistemi
macroscopici, con particolare attenzione al comportamento di fluidi
e transizioni tra vari stati fluidi della materia, la seconda
parte in cui si derivano le equazioni per il comportamento dinamico
dei campi locali, che saranno poi utilizzate nella seconda
parte del corso.

Prima di iniziare con la termodinamica cerchiamo una definizione operativa di stato fluido.

Sappiamo, dalle scuole elementari, che mentre un solido ha forma e dimensioni ben definite, un liquido ha dimensioni definite ma assume la forma del contenitore che lo contiene. Un gas invece non ha nemmeno dimensioni definite essendo in grado di invadere tutto lo spazio a disposizione.

Ci sono tuttavia materiali che sono difficilmente classificabili secondo questi criteri. Alcuni materiali polimerici (come i cui costituenti elementari sono lunghe catene molecolari) appaiono come solidi, ma aspettando un tempo sufficientemente lungo, ~~non~~ ~~non~~ ~~non~~ assumono la forma del contenitore che li contiene. I vetri hanno un comportamento simile.

La distinzione fondamentale tra liquido e solido deve quindi essere basata sulla risposta nel tempo ad una forza applicata. Un sistema che è capace di deformazione sotto una sollecitazione, ma torna allo stato iniziale quando la forza è rimossa è detto elastico. Se invece la deformazione permane in assenza di forza il sistema è anelastico (plastico). La risposta di un solido è principalmente elastica, quella di un liquido principalmente anelastica.

Però i rimbalzi di una pietra sulla superficie dell'acqua mostrano che anche questa definizione ha i suoi limiti.

La distinzione tra liquido e gas è ancora più sfuggente poiché sappiamo che (per azione capillare) è possibile andare da uno stato all'altro senza attraversare nessuna transizione di fase.

Dobbiamo comunque ricordare che il comportamento macroscopico (diagrammi di fase) ~~dipende~~ dipende da una data sostanza al suo

ottenere variando di poco i valori di alcune variabili termodinamiche (ad esempio T e p) e senza necessariamente cambiare le nostre microscopie delle interazioni tra i costituenti del sistema.

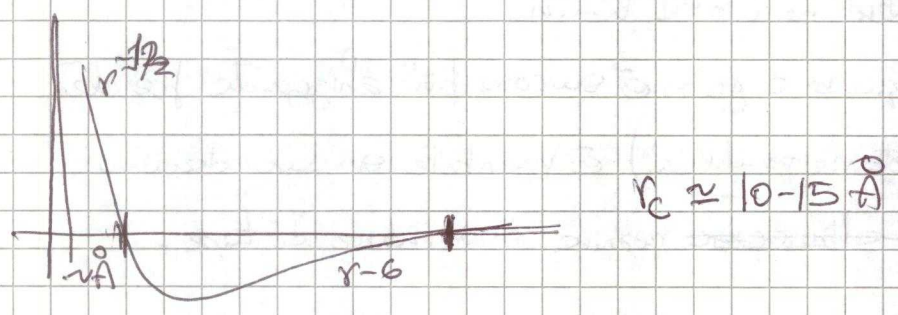
Se consideriamo un sistema costituito da molecole monoatomiche (gas raro) è possibile immaginare che i singoli atomi come particelle elementari che interagiscono tra loro per mezzo di un potenziale di coppia. Perché possiamo dimenticarci del fatto che gli atomi sono formati da nuclei ed elettroni? Si tratta della differenza di scale di energie tra le interazioni tra atomi e quelle che riguardano il legame di elettroni e nuclei.

Considerando per esempio il semplice idrogeno, l'energia per estrarre un elettrone dalla molecola H_2 ~~è circa 13.6 eV~~ dell'ordine dell'eV $\approx 12000 K$

mentre la scala delle fasi condensate dell' H_2 si svolge intorno ai ~~100 K~~ (Punto critico: $T_c \approx 33 K$, $p_c \approx 2 atm$).

quindi le differenze nelle energie in gioco, fa sì che ~~è~~ possibile rappresentare il sistema microscopico come un insieme di molecole con interazioni efficaci di coppia.

Per sistemi monoatomici, deriveremo più in là alcuni tipi di interazioni. Per ora consideriamo il tipico caso di un fluido semplice in cui la legge di interazione ~~è~~ del tipo LJ:



Per un tale sistema è facile capire ~~qualitativamente~~

qualitativamente il comportamento.

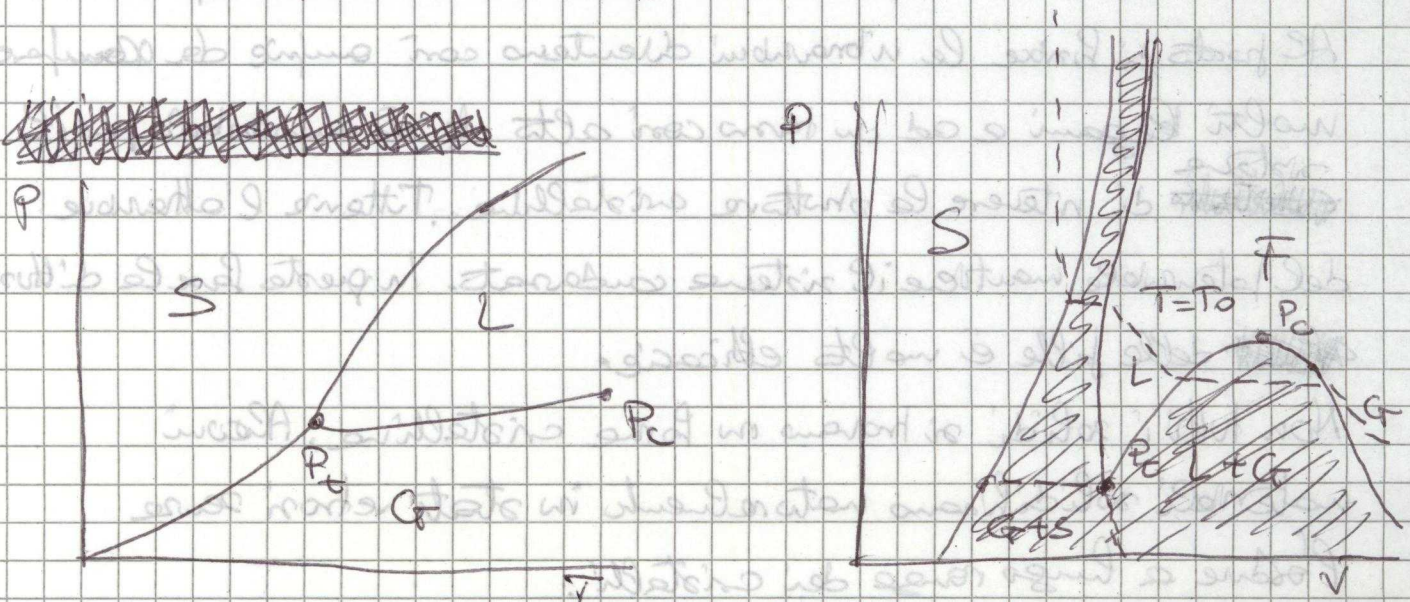
Ad alte densità ^{sono molto vicini e} gli atomi si respingono molto fortemente e tendono ad ordinarsi in strutture regolari per minimizzare la loro energia (aerea libera in realtà). Questo è lo stato solido cristallino. Quando la densità diminuisce gli atomi sono in media più lontani e quindi si attraggono.

Se la temperatura (energia cinetica) è sufficientemente bassa ~~il sistema~~ il sistema presenta una certa coesione dovuta a queste attrazioni e siamo lo stato liquido. Se però la temperatura cresce questa coesione diventa sempre più debole ed a un certo punto il sistema diventa gas. % $\Rightarrow$

DA PAGINA 385

Dobbiamo pensare ~~gli~~ gli atomi come palle clastiche o quantistiche? Dipenderà dalle condizioni esterne.

Il criterio per decidere che tipo di matematica adottare è confrontare la lunghezza d'onda termica dell'atomo con la distanza media tra le particelle nel sistema. Si scopre che, a parte l'~~elio~~ elio, per le altre molecole in discorso tutto particolare, e in parte l'idrogeno, tutti gli ~~effluvi~~ effluvi possono essere trattati come palle clastiche. (vedi HMD).



Sia il solido che il liquido hanno energie tipiche, che dipendono dalle forze e dalle nature delle interazioni. Poiché nelle fasi condensate queste forze tengono le particelle a distanze ben definite, chiamiamo tali forze di legame. Tali forze possono derivare da diversi meccanismi ma in ogni caso hanno origine nella struttura elettronica degli atomi che compongono il sistema.

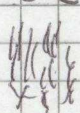
Nella fase "cristallina" gli atomi si ordinano in posizioni che si ripetono nello spazio, in genere in solidi naturali è formato da molti piccoli cristalli, ma in laboratorio si possono crescere sistemi monocristallini (single crystals).

La caratteristica dei solidi cristallini è la presenza di ordine spaziale a lungo portata. In questa fase gli atomi sono localizzati attorno a precise posizioni spaziali e vibrano a cause dell'agitazione termica.

Se scaldiamo un cristallo poco sotto la temperatura di fusione le ~~vibrazioni~~ ampiezze delle oscillazioni crescono causando la rottura di questi legami e la possibilità per le particelle coinvolte di scambiare posizioni con le vicine, dando origine ad un meccanismo di diffusione a salti. Questo avviene prima alla superficie del cristallo, che nel bulk (non osservabile). Al punto di fusione le vibrazioni diventano così ampie da rompere molti legami e ad un tempo così alto che è impossibile per il ~~sistema~~ ~~solido~~ di mantenere la struttura cristallina. Tuttavia l'attrazione del potenziale mantiene il sistema condensato. In questa fase la diffusione delle particelle è molto efficace.

Non tutti i solidi si trovano in forme cristalline. Alcuni materiali solidificano naturalmente in stati vetrosi senza l'ordine a lungo range dei cristalli.

Questi solidi sono chiamati amorfi. In questi materiali gli atomi hanno ancora una disposizione caratteristica, ed è possibile la presenza di cluster di atomi che ricordano l'ordine del cristallo. Tuttavia l'ordine a lungo range è perso e la struttura somiglia più a quella di un liquido. In questi casi (amorfi e liquidi) si parla di ordine a corto range. L'esistenza di solidi amorfi è la prova che la differenza tra lo stato solido e liquido ~~non dipende~~ è più legata alla rigidità del materiale che alla struttura microscopica degli atomi.

- Simmetrie :
- nello stato cristallino il sistema ha simmetrie discrete di traslazione e di rotazione. Ad esempio in una struttura cubica semplice hanno traslazione di un vettore di cella o rotazione di 90° intorno ad un asse che coincide con il vettore di cella.
 - nello stato amorfo o liquido ^(semplice e non cristallino) il sistema ha simmetrie di traslazione e rotazione continue come hanno traslazione e rotazione di un vettore qualsiasi.
 - cristalli liquidi: asimmetria traslazionale ma non rotazionale (fase nematica) 
 - b) ordine orientazionale e traslazionale in una o due direzioni ^(fase smectica) ~~(birefringente)~~

Nello stato liquido e gas (fluidi)

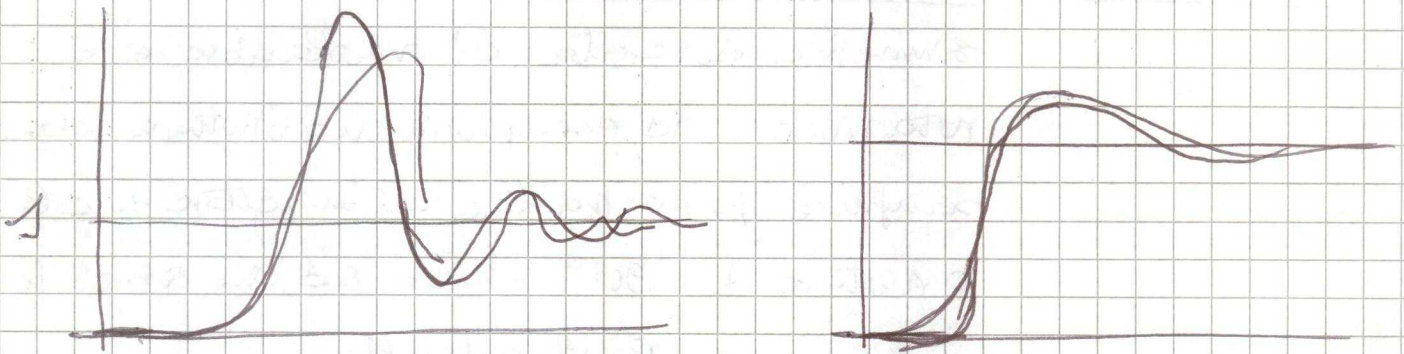
si può avere una misura dell'ordine a corto-range
~~nei~~ delle probabilità che data una particella del
 fluido ne trovi un'altra ad una certa distanza r :

$$P(\vec{r})$$

Poiché il sistema è omogeneo e isotropo (all'equilibrio
 in assenza di campi esterni!!) la $P(\vec{r})$ dovrà
 dipendere dal solo modulo di $\vec{r}$: $|\vec{r}|$

$$\Rightarrow P(\vec{r}) = P(|r|)$$

e per un fluido semplice è del tipo:



TORNARE ALLA PAGINA 3 !!

La termodinamica parte dall'osservazione che le sostanze ~~esiste~~ condensate esiste in stati macroscopici ~~non~~ stabili e che non cambiano nel tempo, caratterizzati da proprietà meccaniche ben definite. Tali proprietà cambiano se si cambiano le condizioni esterne del sistema, ma gli stati di sistema possono essere riprodotti se si riportano i vincoli esterni ai valori corrispondenti. Quando il sistema avrà raggiunto lo stato di equilibrio, ci rimane indifferente o non di cambiamento dei vincoli esterni.

La termodinamica si occupa di descrivere il comportamento di sistemi con molti gradi di libertà, dopo che questi hanno raggiunto il loro equilibrio termico - uno stato in cui la storia passata è dimenticata e tutte le quantità macroscopiche cessano di cambiare nel tempo.

Una caratteristica di questi sistemi è che, nonostante contengano infiniti gradi (~~non~~ 10^{23}) di libertà, il loro stato macroscopico (termodinamico) può essere completamente specificato in termini di poche variabili - LE FUNZIONI DI STATO

Si possono definire molte funzioni di stato per un sistema, ma solo poche sono indipendenti. In pratica si scelgono come variabili di stato grandezze che sono sperimentalmente accessibili. La termodinamica descrive poi il modo di ricavare tutte le altre funzioni di stato.

Le funzioni di stato possono essere **ESTENSIVE** o **INTENSIVE**
Estensive: cambiano in valore quando la taglia del sistema cambia

INTENSIVE: non cambiano con la taglia del sistema.

46

Alcune coppie di variabili int-est appaiono legate perché sono forze generalizzate (intensive) e spostamenti generalizzati (estensive) che appaiono nell'espressione del lavoro termodinamico,

esempi: $N-\mu$, $p-V$, $M-H$ (magnetizzazione
campo magnetico)

$L-T$ (lunghezza-tensione)

$A-\sigma$ (area-tensione superficiale)

$E-P$ (campo elettrico-polarizzazione)

$T-S$

Altre variabili di stato sono le ~~condotte~~ funzioni di risposta, i potenziali termodinamici,

la funzione di stato è una funzione che dipende solo dal valore delle variabili di quello stato. Questo significa che se passiamo da uno stato ad un altro il cambiamento in una ~~variabile~~ funzione di stato dipende solo dagli stati iniziale e finale e non dal cammino percorso da connettere i due stati.

Matematicamente ~~invece~~ le variabili delle funzioni di stato corrispondono a differenziali esatti:

$$F(x_1, x_2) \rightarrow dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_2} dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_{x_1} dx_2$$

se F e le sue derivate sono continue e se vale:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_2} \right]_{x_1} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_{x_1} \right]_{x_2}$$

valore dF è un differenziale esatto.

5

Conseguenze: 1) $F(B) - F(A) = \int_A^B dF$ non dipende dal percorso

2) $\oint_{\text{chiuso}} dF = 0$

3) Se conosco dF posso ottenere F a meno di una costante

RELAZIONI UTILI

Consideriamo 4 variabili di stato x, y, z, w tali che

$F(x, y, z) = 0$ e ~~w~~ w è funzione di x, y, z

① $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$

Ins.: da $F(x, y, z) = 0 \rightarrow x = x(y, z)$
o $y = y(x, z)$

② $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

e scriviamo i diff:

$$\begin{cases} dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \\ dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz \end{cases}$$

eliminando dy si ottiene:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x - 1\right] dx + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz = 0$$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$

$$\textcircled{3} \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)_z$$

dim: (y, z) indipendenti $x = x(y, z)$

$$\frac{dx}{dw} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \frac{dy}{dw} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \frac{dz}{dw}$$

a $z = \text{costante}$ $\frac{dz}{dw} = 0$ si ottiene $\textcircled{3}$

$$\textcircled{4} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_z$$

dim: $x = x(y, w)$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_y \frac{dw}{dy}$$

diviso per dy

e considero $z = \text{costante}$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_z$$

c.d.d.

EQUAZIONE DI STATO

⑥

L'eq. di Stato è una relazione funzionale tra variabili di stato di un sistema in equilibrio che riduce il numero di gradi di libertà indipendenti necessari per descrivere un sistema all'equilibrio.

Tipicamente lega le variabili termodinamiche del sistema (T, S) a quelle meccaniche (P, V).

Esempi:

① GAS IDEALE

$$PV = nRT = Nk_B T$$

② ESPANSIONE DEL VIRIALE:
(GAS REALI)

$$PV = Nk_B T \left[1 + \frac{N}{V} B_2(T) + \left(\frac{N}{V} \right)^2 B_3(T) + \dots \right]$$

$B_2(T)$ ^{secondo} ~~primo~~ coefficiente del viriale

$B_3(T)$ ^{terzo} ~~secondo~~ coefficiente del viriale.

} coefficienti
fenomenologici
(nono esse
ottenuti dalla
teoria microscopica)

③

③ Van der Waals (gas densi - liquidi)

$$\left[P + a \left(\frac{N}{V} \right)^2 \right] (V - Nb) = Nk_B T$$

$\downarrow$ $\downarrow$
termine di volume
correzione escluso

deriva da
densità dell'attrazione tra molecole $\propto \rho^2$

e tende a diminuire la pressione di un ipotetico gas perfetto.

④ SOLIDI: $V = V_0 (1 + \alpha_p T - \kappa_T P)$

} α_p = dilatazione termica

} κ_T = compressibilità
isotermica

↑
coefficienti fenomenologici
derivabili microscopicamente

Definizioni

66

- a) sistema in equilibrio: se le variabili meccaniche non cambiano nel tempo e non ci sono flussi macroscopici nel sistema
- b) Due sistemi sono separati da un muro isolante (non permette trasferimento di materia e energia) e ~~non~~^{nel} le coordinate termodinamiche dell'uno non inducono variazioni nell'altro sistema
- c) Due sistemi sono separati da una parete conduttrice e variazioni in un sistema inducono variazioni nell'altro.
- d) SISTEMA ISOLATO: non può scambiare né energia né materia con l'esterno
- e) SISTEMA CHIUSO: può scambiare energia ma non materia con l'esterno
- f) SISTEMA APERTO: può scambiare energia e materia con l'esterno.
- g) TRASFORMAZIONI REVERSIBILI: ~~sequenza di stati di equilibrio~~^{infinita} trasformazioni quasi statiche in cui il sistema rimane ^{ir}infinitamente vicino a stati di equilibrio. Queste sequenze di stati di equilibrio può essere invertite e il sistema riportato allo stato iniziale senza cambiare nessun cambiamento nelle variabili termodinamiche dell'ambiente (universo)
- h) TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI: (SPONTANEE) in queste trasformazioni il sistema non rimane vicino a stati di equilibrio. Sono spesso trasformazioni rapide e danno origine a flussi e disequilibri. Dopo una trasf. irreversibile il sistema non può essere riportato

nel suo stato iniziale senza cambiare lo stato dell'ambiente.

LEGGE ZERO: DUE CORPI IN EQUILIBRIO TERMODYNAMICO
CON UN TERZO CORPO SONO IN EQUILIBRIO
TRA LORO

PRIMA LEGGE: CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esiste una funzione di stato energia interna U
che può essere cambiata con lavoro meccanico δW
o scambiando calore δQ , o aggiungendo materia

$$dU = \delta Q - \delta W + \sum_i \mu_i dN_i$$

$$\delta W = p dV - J dL - \sigma dA - \vec{E} d\vec{P} - \vec{H} d\vec{M}$$

δQ e δW non sono differenziali esatti perché
il calore e il lavoro dipendono dal percorso

Y = forze generalizzate

X = spostamento generalizzato

$$dU = \delta Q + Y dX + \sum_i \mu_i dN_i$$

SECONDO PRINCIPIO: IL CALORE FLUISCE SPONTANEAMENTE
DA CORPI CALDI A CORPI FREDDI

a) la tendenza spontanea di un sistema verso l'equilibrio
termodinamico non può essere metita senza convertire
lavoro in calore

b) In un processo ciclico, non è possibile convertire calore da un
bagno caldo in lavoro senza allo stesso tempo trasferire
calore ad un bagno più freddo

c) il cambio di entropia di ogni sistema e il suo ambiente circostante (considerati insieme) è positivo e si annulla solo per processi che sono reversibili (come i gas in equilibrio).

~~Il secondo principio ci permette di introdurre una~~

nuova variabile di stato: L'ENTROPIA, connessa alla temperatura. L'entropia è una misura del disordine nel sistema, un modo per determinare la stabilità degli stati di equilibrio, e una quantità che lega trasformazioni reversibili e irreversibili.

~~Per trasformazioni reversibili definiamo~~

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{poiché } S \text{ è funzione di stato}$$

dS è un differenziale esatto.

Nelle trasformazioni irreversibili $dS > \frac{\delta Q}{T}$

$$\Rightarrow \boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T}} \quad \text{e l'uguaglianza vale per transf. reversibili.}$$

Per un sistema isolato: $\Delta S \geq 0$

Quindi ogni trasformazione che avviene in un sistema isolato può mantenere o crescere l'entropia del sistema a seconda se è reversibile o irreversibile.

FUNZIONI OMOGENEE:

L'entropia è estensiva, e additiva.

Per un sistema composto da un numero di sottosistemi indipendenti l'entropia è la somma delle entropie parziali,

$$S(U, X, \{N_i\})$$

$$S(\lambda U, \lambda X, \{\lambda N_i\}) = \lambda S(U, X, \{N_i\})$$

quindi l'entropia è una funzione omogenea di prima specie: aumentando tutte le variabili estensive di un fattore λ l'entropia cresce di un fattore λ

I e II principio: $\Rightarrow \boxed{T ds \geq dU - \cancel{\lambda} dX - \sum_i \mu_i dN_i} \quad (4)$
d'uguaglianza vale per trans. reversibili

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} (\lambda S) = S = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{X, \{N_i\}} \frac{d(\lambda U)}{d\lambda} + \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_{U, N_i} \frac{d(\lambda X)}{d\lambda} + \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial N_i} \right)_{U, X} \frac{d(\lambda N_i)}{d\lambda}$$

da (4) si vede che: $\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{X, N} = \frac{1}{T}$, $\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_{U, N} = -\frac{Y}{T}$, $\left(\frac{\partial S}{\partial N_i} \right)_{U, X} = -\frac{\mu_i}{T}$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{U}{T} - \frac{YX}{T} - \sum_i \frac{\mu_i N_i}{T}} \quad \text{Equazione di Eulero}$$

Le equazioni (4) sono derivate per sistemi di stato

L'eq. di Eulero è detta equazione fondamentale perché contiene tutte le possibili informazioni termodinamiche

SL sistema.

86

Si capisce che tutte le variabili **ESTENSIVE** sono funzioni omogenee di grado uno, mentre le variabili intensive sono grandezze omogenee di grado zero:

$$F(x): F(\lambda^\alpha x) = \lambda^\alpha F(x) \quad \alpha = \text{grado di omogeneità}$$

L'equazione fondamentale può anche essere scritta:

$$\textcircled{44} \quad U(S, x, \{N_i\}) = T(S, x, \{N_i\}) S + Y(S, x, \{N_i\}) x + \sum_i \mu_i(S, x, \{N_i\}) N_i$$

poiché T , Y e μ_i sono tutte intensive possono dipendere solo da densità come $\frac{S}{x}$ / $\frac{N_i}{x}$

I e II principi $\Rightarrow dU = TdS + YdX + \sum_i \mu_i dN_i$

Se prendiamo le derivate di $\textcircled{44}$ e usiamo l'eq. precedente otteniamo la equazione di GIBBS-DUHEM

$$\boxed{0 = SdT + x dY + \sum_i N_i d\mu_i}$$

che lega tra loro i differenziali delle variabili intensive

Per un sistema ad una componente GD si riduce a:

$$d\mu = - \frac{S}{N} dT - \frac{x}{N} dY \quad \text{che mostra la ~~la~~ relazione$$

chiaramente come le grandezze intensive siano solo funzioni delle densità.

POTENZIALI TERMODINAMICI

9

In sistemi meccanici conservativi, il lavoro può essere accumulato sotto forma di energia potenziale e riutilizzato successivamente. ~~Lo stesso~~ In certe condizioni, lo stesso vale per i sistemi termodinamici. Possiamo immaginare ^{in una trasformazione reversibile} energia compiendo lavoro sul sistema e poi recuperare eventualmente questa energia in forma di lavoro.

Questa forma di energia è detta ENERGIA LIBERA

Ci sono diverse forme di energia libera che dipendono dalle variabili termodinamiche considerate indipendenti (vincoli esterni).

L'energia libera ~~gioca~~ ^{nei} per i sistemi termodinamici ha un ruolo analogo a quello dell'energia potenziale per i sistemi meccanici ed è per questo detta POTENZIALE TERMODINAMICO.

ENERGIA INTERNA:

Se consideriamo $S, X, \{N_i\}$ indipendenti

scriviamo che

$$U(S, X, \{N_i\}) = TS + YX + \sum_i \mu_i N_i$$

$$dU \leq TdS + YdX + \sum_i \mu_i dN_i$$

Possiamo usare il fatto che dU è un differenziale esatto per ricavare relazioni tra le derivate di variabili intensive.

In fatti nelle derivate seconde l'ordine delle derivate è irrilevante e quindi RELAZIONI DI MAXWELL:

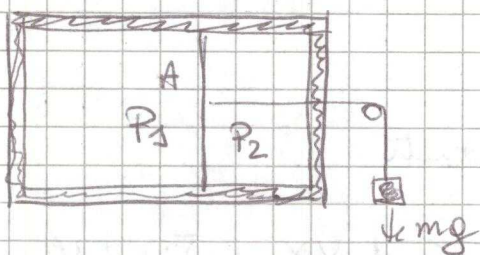
$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{x, N_i} \right]_{S, N_i} = \left[\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{S, N_i} \right]_{x, N_i} \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{S, N} = \left(\frac{\partial Y}{\partial S} \right)_{x, N}$$

(its) relazioni analoghe:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial N_i} \right)_{S, x, N_{j \neq i}} &= \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial S} \right)_{x, N_i} \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial N_i} \right)_{S, x, N_{j \neq i}} &= \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x} \right)_{S, N_i} \\ \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial N_i} \right)_{S, x, N_{k \neq i}} &= \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial N_j} \right)_{S, x, N_{k \neq j}} \end{aligned} \right.$$

L'energia interna è un potenziale TERMODINAMICO (o ENERGIA LIBERA) perché nel caso di sistemi isolati sottoposti a trasformazioni reversibili, il cambiamento di energia interna corrisponde al minimo lavoro che può essere compiuto sul, o dal, sistema.

Consideriamo ad esempio un sistema chiuso e isolato.



$$\text{se } P_1 A + mg \geq P_2 A$$

lavoro è fatto ~~dal~~ dal gas da m.

$$\text{se } P_1 A + m < P_2 A \quad \text{lavoro è fatto dal gas su m.}$$

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

ΔQ = scambio di calore con l'esterno

$$\Delta W = P \Delta V + \Delta W_{\text{free}}$$

↑
cambio di volume

↑
lavoro per spostare le masse

Perché per ipotesi il sistema è chiuso e isolato

$$\Delta Q = P \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta U)_{S, X, \{N_i\}} = -\Delta W_{free}$$

quindi per un processo reversibile
a $S, V, \{N_i\}$ costanti
il lavoro può essere immagazzinato
sotto forma di energia interna

Per un processo spontaneo (irreversibile) il lavoro può essere
fatto a $S, V, \{N_i\}$ costanti solo se permettiamo scambi
di calore con l'esterno:

$$\Delta U = \int dU < \int T dS - \int P dV - \Delta W_{free} + \sum_i \int \mu_i dN_i$$

dove gli integrali sono presi ⁱⁿ cammino reversibile da connettere
gli stati iniziali e finali.

Se vogliamo che il processo avvenga a entropia
costante $da \int T dS = 0$, il calore deve
necessariamente essere ceduto all'ambiente

Quindi in un processo spontaneo: $(\Delta U)_{S, X, \{N_i\}} < -\Delta W_{free}$

Per un processo che avviene senza scambio di lavoro

$$(\Delta U)_{S, X, \{N_i\}} \leq 0$$

$\Rightarrow$ Uno stato di EQUILIBRIO a S, X, N_i ~~costanti~~
FISSATI E' UNO STATO DI MINIMA ENERGIA
INTERNA

ENTALPIA:

Se si vuole lavorare a n o a X costante us a Y costante, allora l'energia interna non è più il giusto potenziale termodinamico.

Definiamo invece:

$$H(S, Y, N) = U(S, X, N) - XY \\ = ST + \sum \mu N$$

TRASFORMATA DI LEGENDRE: (vedi MS)

Le differenziale dell'entalpia si ricava facilmente

$$dH = TdS - XdY + \sum \mu dN$$

eq. di stato: $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{Y, N}$, $X = - \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right)_{S, N}$, $\mu = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S, Y}$

REL MAXWELL:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{S, N} = - \left(\frac{\partial X}{\partial S} \right)_{Y, N} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_{S, Y} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{Y, N} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial N} \right)_{S, Y} = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial Y} \right)_{S, N} \end{cases}$$

analogamente al caso del sistema chiuso e isolato per l'energia interna, per l'entalpia si ottiene:

$$\Delta H = \int dH \leq \int TdS - \int XdY + \int \mu dN$$

$$(\Delta H)_{S, Y, N} \leq -\Delta W_{\text{free}}$$

per sistemi isolati: $(\Delta H)_{S, Y, N} \leq 0 \Rightarrow$

lo stato di equilibrio a S, Y, N fissati è quello di minima ENTALPIA

ENERGIA LIBERA DI HELMHOLTZ

Sistema Canonico controllando T, X, N quindi la trasformata di Legendre in questione è:

$$F(T, X, N) = U(S, X, N) - TS = YX + \mu N$$

$$dF \leq -SdT + YdX + \mu dN$$

eq. di stato:

$$\begin{cases} S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{X, N} \\ Y = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{T, N} \\ \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T, X} \end{cases}$$

MAXWELL:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_{T, N} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_{X, N} \quad / \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T, X} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{X, N}$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial N}\right)_{T, X} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial X}\right)_{T, N}$$

$(\Delta F)_{T, X, N} \leq 0$ stato di equilibrio corrisponde al minimo dell'energia libera di Helmholtz.

GIBBS e GRAN POT.

FUNZIONI DI RISPOSTA

116

Le funzioni di risposta sono funzioni di stato che misurano le variazioni di altre funzioni di stato, si danno in termiche e meccaniche

CAPACITA' TERMICA : è la quantità di calore necessaria per cambiare la temperatura di un sistema.

Si può pensare di lavorare a X, N fissati o a Y, N fissati e quindi si avranno diverse capacità termiche.

FISSIAMO X, N : Poiché $dN=0$ $\delta Q = dU - YdX$

$$TdS = \delta Q = dU - YdX = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{X,N} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{T,N} dX - YdX$$

~~Per cambiare dX~~

$$\Rightarrow \delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{X,N} dT \Rightarrow C_{X,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{X,N}$$

CAPACITA' TERMICA : per definizione è la quantità di calore necessaria a cambiare la temperatura

A seconda delle variabili che si considerano indipendenti si avranno diverse capacità termiche.

$$(T, X, N): \quad \delta Q = TdS = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{X,N} dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_{T,N} dX + T \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,X} dN$$

In questo cambiamento X e N sono fissati e quindi $dX = dN = 0$

$$\text{quindi } \frac{\delta Q}{dT} = \left(\frac{TdS}{dT}\right)_{X,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{X,N}$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{X,N} \rightarrow \boxed{C_{X,N} = -T^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_{X,N}} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{X,N}$$

E' possibile derivare però un'altra espressione molto utile per la capacità termica. Dalla relazione

$$\delta Q = dU + YdX = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{X,N} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_{T,N} dX - YdX$$

$$\Rightarrow C_{X,N} = \left(\frac{\delta Q}{\partial T} \right)_{X,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{X,N}$$

che lega la capacità termica a X costante alle variazioni di energia interne con la temperatura.

FUNZIONI DI RISPOSTA MECCANICA

sistemi PVT

QUI !!! $\Rightarrow$
da derivare

Vogliamo sapere come cambia il volume se cambiano le premesse. Questa variabile è la compressibilità isoterma

$$\chi_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial P} \right)_{T,N} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right)_{T,N}$$

Se la variabile termica indipendente è l'entropia invece della temperatura si ha la compressibilità isentropica

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S,N} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial P^2} \right)_{S,N}$$

In più se vogliamo sapere come il volume cambia al cambiare di T definiamo l'espansività termica come

$$\alpha_{P,N} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{P,N}$$

RELAZIONI UTILI:

a) $\chi_T (C_p - C_v) = TV \alpha_P^2$

b) $C_p (\chi_T - \chi_S) = TV \alpha_P^2$

$$\Rightarrow \frac{C_p}{C_v} = \frac{\chi_T}{\chi_S}$$

Unbino ora T e Y come variabili indipendenti e chiediamo la capacità termica:

$$\delta Q = T dS = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{Y,N} dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \right)_{T,N} dY$$

~~$$\delta Q = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{Y,N} dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \right)_{T,N} dY =$$~~

~~$$= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{Y,N} dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \right)_{T,N} dY$$~~

ma $\delta Q = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{X,N} dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_{T,N} dX =$

$$= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_X dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_T \left[\left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_Y dT + \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_T dY \right] = \textcircled{4}$$

$$\Rightarrow C_{Y,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{Y,N} = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{Y,N}$$

da $\textcircled{4}$ si ottiene anche:

$$C_{Y,N} = C_{X,N} + T \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_Y \quad \textcircled{5}$$

Del resto da $\delta Q = dU - Y dX = dU - Y \left[\left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_Y dT + \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_T dY \right]$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_X dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_T - Y \right] \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_T dY \right]$$

si ha:

$$C_{Y,N} = C_{X,N} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_{T,N} - Y \right] \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_{Y,N} \quad \text{ovvero } \textcircled{6}$$

si ottiene: $T \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_{T,N} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_{T,N} - Y \right] = -T \left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_{X,N}$

relazione di Maxwell

$$\Rightarrow - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} \right)_{X,N} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_{X,N}}{\partial X} \right)_{T,N}$$

STABILITA' DELL'EQUILIBRIO

(13)

Abbiamo visto come l'entropia dello stato di equilibrio deve essere un massimo, ossia ogni fluttuazione dallo stato di equilibrio deve causare una diminuzione di entropia. Se non fosse così il sistema si potrebbe muovere spontaneamente ad un altro stato di equilibrio ad entropia maggiore. Questo significa che il precedente stato non era di equilibrio.

SISTEMA PT: EQUILIBRIO LOCALE

Consideriamo una miscela di α specie in un volume V_T diviso in due parti A e B, da una parete ~~porosa~~ mobile porosa.

Poiché il sistema è chiuso e isolato ~~l'energia interna~~ ^{o la}

$$U_T = \sum_{\alpha} U_{\alpha} \quad , \quad V_T = \sum_{\alpha} V_{\alpha} \quad , \quad N_{Tj} = \sum_{\alpha} N_{\alpha j} \quad , \quad S_T = \sum_{\alpha} S_{\alpha}$$

Assumiamo che $\Delta U_T = \Delta V_T = \Delta N_{Tj} = 0$ (isolato e chiuso).

$$\Rightarrow \Delta U_A = -\Delta U_B \quad , \quad \Delta V_A = -\Delta V_B \quad , \quad \Delta N_{Aj} = -\Delta N_{Bj} \quad \forall j$$

In una trasformazione spontanea, la variazione di entropia sarà:

$$\begin{aligned} \Delta S_T &= \sum_{\alpha} \left[\left(\frac{\partial S_{\alpha}}{\partial U_{\alpha}} \right)_{V_{\alpha}, N_{\alpha j}} \Delta U_{\alpha} + \left(\frac{\partial S_{\alpha}}{\partial V_{\alpha}} \right)_{U_{\alpha}, N_{\alpha j}} \Delta V_{\alpha} + \sum_j \left(\frac{\partial S_{\alpha}}{\partial N_{\alpha j}} \right)_{U_{\alpha}, V_{\alpha}} \Delta N_{\alpha j} \right] + \\ &= \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) \Delta U_A + \left(\frac{P_A}{T_A} - \frac{P_B}{T_B} \right) \Delta V_A + \sum_j \left(\frac{\mu_{Bj}}{T_B} - \frac{\mu_{Aj}}{T_A} \right) \Delta N_{Aj} + \dots \end{aligned}$$

~~Per lo stato di equilibrio~~

Per lo stato di equilibrio l'entropia è massima e quindi le variazioni di ΔS rispetto alle ~~variazioni~~ a piccole variazioni delle variabili indipendenti devono essere

note. Ne segue:

(136)

$$\frac{1}{T_A} = \frac{1}{T_B} \quad \text{equilibrio termico}$$

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \quad \text{equilibrio meccanico}$$

$$\forall j: \frac{\mu_{Aj}}{T_A} = \frac{\mu_{Bj}}{T_B} \quad \text{equilibrio chimico}$$

Se la parete non è porosa abbiamo: $\Delta N_A = \Delta N_B = 0$ e quindi $\mu_{Aj} \neq \mu_{Bj}$ ($\forall j$). Se inoltre la parete è fissata in volume non avremmo avuto equilibrio meccanico $P_A \neq P_B$.

SISTEMA PVT: STABILITÀ LOCALE

La stabilità dello stato di equilibrio fare delle condizioni al contorno delle fluttuazioni di risposta. Consideriamo un sistema chiuso e isolato con una sola componente, e che come prima è diviso in due parti A, B. Siano $V_A^0, S_A^0, U_A^0, N_A^0$ il volume, entropia, energia interna e numero di pille nella parte A all'equilibrio. Chiamiamo P^0, T^0 e μ^0 le quantità estensive dell'equilibrio. Poiché il numero totale di pille è finito c'è una probabilità finita d'area delle fluttuazioni che non devono avvenire a U, V e N fissati. Poiché l'equilibrio è stabile, queste fluttuazioni minori causeranno una diminuzione di entropia. Assumiamo che localmente l'entropia può essere sviluppata in serie delle fluttuazioni delle variabili indipendenti:

$$S_A(U_A, V_A, N_A) = S_A^0(U_A^0, V_A^0, N_A^0) + \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}^0 \Delta U_A + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N}^0 \Delta V_A + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}^0 \Delta N_A + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \Delta \left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A}\right)_{V,N} \Delta U_A + \Delta \left(\frac{\partial S_A}{\partial V_A}\right)_{U,N} \Delta V_A + \Delta \left(\frac{\partial S_A}{\partial N_A}\right)_{U,V} \Delta N_A \right\} + \dots$$

dove:

$$\Delta \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial U_\alpha} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right)_{V,N}^0 \Delta U_\alpha + \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial U} \right)_{V,N} \right]_{V,N}^0 \Delta V_\alpha +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} \right]_{V,V}^0 \Delta N_\alpha$$

e espressioni simili valgono per le altre variabili delle derivate. Le variabili sono definite rispetto all'equilibrio e quindi il termine del prim'ordine scompare. La variazione totale di entropia si ottiene sommando alle due parti:

$$\Delta S_T = \frac{1}{2} \sum_{A,B} \left\{ \Delta \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial U_\alpha} \right)_{V,N} \Delta U_\alpha + \Delta \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial V_\alpha} \right)_{U,N} \Delta V_\alpha + \Delta \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial N_\alpha} \right)_{U,V} \Delta N_\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{A,B} \left\{ \Delta \left(\frac{1}{T} \right)_\alpha \Delta U_\alpha + \Delta \left(\frac{P}{T} \right)_\alpha \Delta V_\alpha - \Delta \left(\frac{\mu}{T} \right)_\alpha \Delta N_\alpha \right\} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2T} \sum_{A,B} \Delta T_\alpha \Delta U_\alpha} \quad \textcircled{*}$$

$$\textcircled{*} = - \frac{\Delta T}{T^2} \Delta U + \frac{\Delta P \Delta V}{T} - P \frac{\Delta T \Delta V}{T^2} - \frac{\Delta \mu \Delta N}{T} + \frac{\mu}{T^2} \Delta T \Delta N =$$

$$= - \frac{\Delta T}{T^2} [\Delta U + P \Delta V - \mu \Delta N] + \frac{1}{T} [\Delta P \Delta V - \Delta \mu \Delta N] =$$

$$= - \frac{\Delta T}{T^2} [T \Delta S - P \Delta V + \mu \Delta N + P \Delta V - \mu \Delta N] + \frac{1}{T} [\Delta P \Delta V - \Delta \mu \Delta N] =$$

$$= \frac{1}{T} [-\Delta T \Delta S + \Delta P \Delta V - \Delta \mu \Delta N] \quad \text{per ogni scatola}$$

 $\Rightarrow$

$$\Delta S_T = \frac{1}{2T} \sum_{A,B} [-\Delta T_\alpha \Delta S_\alpha + \Delta P_\alpha \Delta V_\alpha - \Delta \mu_\alpha \Delta N_\alpha]$$

VARIAZIONE DI ENTROPIA

Scegliamo come variabili termodinamiche indipendenti

$$\Delta T_\alpha, \Delta V_\alpha, \Delta N_\alpha:$$

$$\begin{cases} \Delta \mu_\alpha = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{P,N}^0 \Delta T_\alpha + \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{T,N}^0 \Delta V_\alpha + \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,P}^0 \Delta N_\alpha \\ \Delta S_\alpha = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,N}^0 \Delta T_\alpha + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T,N}^0 \Delta V_\alpha + \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{T,P}^0 \Delta N_\alpha \\ \Delta P_\alpha = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{P,N}^0 \Delta T_\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial P} \right)_{T,N}^0 \Delta V_\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial N} \right)_{T,P}^0 \Delta N_\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta S_T = \frac{1}{2T} \sum_{\alpha} \left\{ - \frac{C_P}{T} (\Delta T_\alpha)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N}^0 \Delta P_\alpha \Delta T_\alpha + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N}^0 (\Delta P_\alpha)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,P}^0 (\Delta N_\alpha)^2 \right\}$$

$$\Delta S_T = \frac{1}{2T} \sum_{\alpha} \left\{ - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}^0 \Delta T_\alpha^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,N}^0 (\Delta V_\alpha)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V}^0 \Delta N_\alpha^2 + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N}^0 - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N}^0 \right] \Delta T_\alpha \Delta V_\alpha + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial N} \right)_{T,V}^0 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T,N}^0 \right] \Delta V_\alpha \Delta N_\alpha - \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{T,N}^0 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{V,N}^0 \right] \Delta T_\alpha \Delta N_\alpha \right\}$$

I termini con variabili miste si annullano per le relazioni di Maxwell; quindi si ha:

$$\Delta S_T = - \frac{1}{2T} \sum_{\alpha} \left\{ \frac{C_V}{T} \Delta T_\alpha^2 + \frac{1}{\chi_{TV}} \Delta V_\alpha^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V}^0 \Delta N_\alpha^2 \right\}$$

Perché ΔS_T è un minimo $\Rightarrow$

$$\left[C_V, \chi_{TV}, \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V} \right] \geq 0$$

$$\begin{cases} C_V \geq 0 \text{ stabilità termica} \\ \chi_{TV} \geq 0 \text{ stabilità meccanica} \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V} \geq 0 \text{ stabilità chimica} \end{cases}$$

Si può dimostrare che:

$$\begin{cases} C_p > C_v > 0 \\ \chi_T > \chi_S > 0 \end{cases}$$

IMPLICAZIONI DELLA STABILITA' SULL'ENERGIA LIBERA

a) Funzione convessa e quella funzione per la quale, fissati due punti x_1 e x_2 ($x_1 < x_2$), si ha che la corda da x_1 a x_2 è sopra la funzione $\forall x \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) > f(x) - f(x_1) \quad \forall x_1 < x < x_2$$

~~è~~

b) una funzione è concava se $-f(x)$ è convessa,

Energia libera di Helmholtz:

$$dF = -SdT + p dV + \mu dN$$

$$C_v = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_{V,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$C_v > 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_{V,N} < 0$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,N}$$

$$\chi_T > 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_{T,N} > 0$$

F è concava in T , e convessa in V

GAS IDEALE

(155)

$$PV = Nk_B T$$

$$C_V = \alpha Nk_B$$

($\alpha = \frac{3}{2}$ gas monoatomico, $\frac{5}{2}$ gas diatomico,
 $= 3$ gas poliatomico)

Energie interne e entropia:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = \alpha Nk_B T$$

~~molare e' energia potenziale
dipende dalla mole~~

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{T,V} = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} - P = 0 \quad (\text{vedi eq. di stato})$$

$$\Rightarrow U(T) = U_0 + \alpha Nk_B (T - T_0)$$

$\Rightarrow$ L'ENERGIA INTERNA DI
UN GAS IDEALE DIPENDE
SOLO DALLA TEMPERATURA

Per avere l'entropia sappiamo che:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{C_V}{T} = \frac{\alpha Nk_B}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{Nk_B}{V}$$

$$\Rightarrow S(T,V) = S_0 + Nk_B \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^\alpha \frac{V}{V_0} \right]$$

$$\Rightarrow U(S,V) = U_0 + \alpha Nk_B T_0 \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\alpha} e^{\frac{(S-S_0)}{\alpha k_B N}} - 1 \right]$$

POTENZIALE
TERMODINAMICO

Entalpia: $H = U + PV$

$$H(S,P) = H_0 + (\alpha+1) Nk_B T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/\alpha+1} e^{\frac{S-S_0}{Nk_B(\alpha+1)}} \right]$$

HELMHOLTZ: $F(T,V) = F_0 + (\alpha Nk_B - S_0)(T - T_0) - Nk_B T \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^\alpha \frac{V}{V_0} \right]$

GIBBS: $G(T,P) = G_0 + [(\alpha+1) Nk_B - S_0](T - T_0) - Nk_B T \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha+1} \frac{P_0}{P} \right]$

ESPANSIONE LIBERA DI UN GAS

Immaginiamo un gas in una camera mobile a T_i, P_i, V_i e immaginiamo che ora lasciamo espandere in una camera con vuoto fino ad un valore del volume finale V_f . Immaginiamo che l'intero processo avvenga adiabaticamente, ossia $\Delta Q = 0$. Poiché ~~non~~ per ipotesi anche il lavoro compiuto è $\Delta W = 0$ si ha che:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0$$

L'unico effetto dell'espansione è il trasferimento di energia ~~che crea~~ cinetica interna in energia potenziale interna.

Il processo avviene spontaneamente, quindi in maniera irreversibile, e quindi $\Delta S = S_f - S_i > 0$.

Non possiamo ~~non~~ usare la termodinamica per descrivere l'espansione ma possiamo ~~legare con la termodinamica~~ determinare lo stato finale del gas.

$$\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,N} dV = 0 ; dN = 0$$

$$\Rightarrow dT = - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,N}}{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N}} dV = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{U,N} dV$$

da cui otteniamo sotto le relazioni:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \quad \text{dalla 185}$$

la quantità $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{U,N}$ è detta COEFFICIENTE DI JOULE DIFFERENZIALE

(166)

~~QUESTA ESERCIZIO È PRATTO PER IL PRIMO PRINCIPIO~~

Abbiamo già derivato (vedi pg 126 in fondo) che

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} - P \quad (*)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{U,N} = - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N}}{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}} = \frac{P}{C_V} - \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$$

GAS IDEALE: $\begin{cases} PV = Nk_B T \\ C_V = \frac{3}{2} Nk_B \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{U,N} = 0$

quindi in un gas ideale la temperatura rimane e dopo l'espansione e la stessa.

Van der Waals: $\left(P + a \frac{N^2}{V^2}\right) (V - Nb) = Nk_B T$

~~QUESTO ESERCIZIO È PRATTO PER IL PRIMO PRINCIPIO~~

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2}$$

da (*): $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,N} = T \frac{Nk_B}{V - Nb} - \frac{Nk_B T}{V - Nb} + a \frac{N^2}{V^2} = a \frac{N^2}{V^2}$

abbiamo ora trovato C_V per vdW:

da pg. 126 ultima riga $\Rightarrow \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_{T,N} = - \frac{1}{T^2} T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_{V,N} = 0$

$\Rightarrow C_V = C_V(T)$ indipendente dal volume.

E' quindi termodinamicamente consistente sempre che

$$C_V(\text{vdW}) = C_V(\text{GI}) = \frac{3}{2} N K_B \quad (\text{DULONG-PETIT})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{U,N} = - \frac{2}{3} a \left(\frac{N}{V} \right)^2 \frac{1}{N K_B} = - \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \frac{1}{K_B} < 0$$

$$\Rightarrow \cancel{dT} = - \frac{2}{3} \frac{N}{V^2 K_B} dV$$

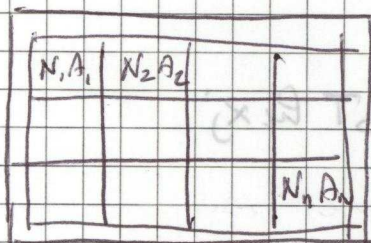
$$\Rightarrow T_f = T_i + \frac{2}{3} \frac{a N}{K_B} \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right)$$

$$\left[\frac{\Delta T}{T_i} = \frac{T_f - T_i}{T_i} = \frac{2 a N}{3 K_B T_i} \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right) < 0 \right] \approx V_f > V_i$$

ENTROPIA DI MESCOLAMENTO E PARADOSSO DI GIBBS

L'entropia è una misura del disordine nel sistema e quindi possiamo aspettarci che cresca ~~per~~ durante il processo di mescolamento di due sostanze.

Consideriamo un gas ideale con N_1 mole di A_1 , N_2 mole di A_2 etc. $N = N_1 + N_2 + \dots$. All'equilibrio P e T sono uniformi e vale l'EOS:



$$P = \sum_{j=1}^n N_j \frac{k_B T}{V}$$

$$N = \sum_{j=1}^n N_j$$

definisco $x_j = \frac{N_j}{N}$ tale che $\sum_j x_j = 1$

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V} k_B T \sum_j x_j = \sum_j P_j$$

con $P_j = \frac{N_j}{V} k_B T$ è la pressione che avrebbe il sistema se ~~le~~ le N_j pille occupassero tutto il volume V , in assenza delle altre pille.

Consideriamo allora le trasformazioni dal sistema con partizionamento al sistema senza partizioni.

Per descrivere il sistema a P e T costanti conviene usare l'energia di Gibbs:

$$dG = -SdT + VdP + \sum_j \mu_j dN_j$$

Per il GP si ha:

$$G(T, P, N) = N k_B T [\Phi(T) + \ln P]$$

ove $\Phi(T)$ è solo funzione della temperatura.

L'energia libera dello stato iniziale con le partizioni è quindi:

$$G_i(T, P, N_1 \dots N_n) = \sum_j^N N_j k_B T [\Phi(T) + \ln P]$$

Togliendo le partizioni, ~~per~~ i sistemi si miscelano e l'energia di Gibbs dello stato di equilibrio finale corrisponde alla somma delle energie di ~~un~~ GP che occupano l'intero volume:

$$\begin{aligned} G_f(T, P, N_1 \dots N_n) &= \sum_j^N N_j k_B T [\Phi(T) + \ln P_j] = \\ &= \sum_j^N N_j k_B T [\Phi(T) + \ln P + \ln x_j] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta G(T, P, N_1 \dots N_n) = G_f - G_i = \sum_j^N N_j k_B T \ln x_j$$

e quindi:

$$\Delta S = S_f - S_i = - \sum_j^N N_j k_B \ln x_j$$

E' chiaro che $\mu_{\text{max}}^A(T, P_A) = \mu_{\text{max}}^A(T, P_A)_0$ con $x_5 \rightarrow 0$ come il pot. chimico di un bullo di acqua pura.

Nel comparto B, ~~rispetto alla soluzione~~ abbiamo una soluzione, quindi il potenziale chimico dell'acqua dipende dalle interazioni $w-w$ e dalle interazioni w -soluto, e poi abbiamo un termine entropico (come di gas perfetto) derivato nell'applicazione precedente.

Se la soluzione è sufficientemente diluita possiamo trascurare le forze di interazione v -soluto perché $\sim p_{\text{soluto}} - p_{\text{H}_2\text{O}} (v_{\text{H}_2\text{O}} - v_{\text{H}_2\text{O}})$

In questa ipotesi si ha:

$$\mu_{w}^B(T, P_3) = \mu_{w}^B(T, P_3)_0 + k_B T \ln x_w^B \quad (A)$$

NOTA: α infomobius $P_A = P_B \Rightarrow \mu_{\alpha}^A(T, P_A)_0 = \mu_{\alpha}^B(T, P)_0 + k_B T \ln \alpha_{\alpha}^B$
 $\Rightarrow \alpha_{\alpha}^B = 1$

DERIVIAMO ORA LA LEGGE DI VAN'T HOFF:

Sapremo che $G(T, P) = N_A \mu_{A, l}(T, P, N_A, N_S) + N_S \mu_{S, l}(T, P, N_A, N_S)$.
 $= G_{A, l}(T, P, N_A, N_S) + G_{S, l}(T, P, N_A, N_S)$

Or ~~$G_{ix}(T, P, N, x_{ix}) = N_{ix} \ln x_{ix} (P/P_0, x_{ix})$~~

In questo modo abbiamo ridotto il problema ~~sofido~~ di trovare il potenziale chimico della soluzione a quello di conoscere il potenziale chimico dell'acqua pura:

$$\mu_{ix}^B(T, P_B, x_{ix}) = \mu_{ix}^B(T, P_B, 1) + k_B T \ln x_{ix}^B$$

Calcoliamo ora $\mu_w(T, P_B, 1) - \mu_w(T, P_A, 1)$:

Sappiamo che
$$\begin{cases} G(T, P, N) = N\mu(T, P) \\ dG = -SdT + VdP + \mu dN \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{T, N} = \left(\frac{\partial V}{\partial N} \right)_{T, P} = v(T, P)$ volume per ~~particella~~ ^{molecole} di H_2O pure. (1)

ora $\chi_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_{T, N} = - \left(\frac{\partial \ln v}{\partial P} \right)_{T, N}$

se facciamo l'ipotesi che $\chi_T(T, P, N) = \chi_T(T, N)$ non dipende da P (è una approx molto accurata)

$\Rightarrow \ln \left[\frac{v(P)}{v(0)} \right] = -\chi_T P$ $v(0)$ = volume specifico a pressione nulla

$\Rightarrow v(P, T) = v(T, 0) e^{-\chi_T P} \approx v(T, 0) (1 - \chi_T P)$ ($P \ll 1/\chi_T$)

Inoltre da (1) si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mu(T, P_B, 1) - \mu(T, P_A, 1) &= \int_{P_A}^{P_B} v(T, P) dP = \\ &= v(T, 0) \left[(P_B - P_A) - \frac{\chi_T}{2} (P_B^2 - P_A^2) \right] = \\ &= v(T, 0) (P_B - P_A) \left[1 - \frac{\chi_T}{2} (P_B + P_A) \right] \\ &= \pi \langle v \rangle \quad (2) \end{aligned}$$

$\langle v \rangle = v(T, 0) \left[1 + \frac{\chi_T}{2} (P_A + P_B) \right]$ è il volume specifico medio dell'acqua tra P_A e P_B

Usando (2) e la condizione di equilibrio si ottiene:

$$\mu_w(T, P_B, 1) - \mu_w(T, P_A, 1) = \boxed{-k_B T \ln x_w^B = \pi \langle v_w \rangle}$$

Se $N_S \ll N_W \approx N$ (soluzione molto diluita)

possiamo sviluppare il logaritmo intorno a 1: $\ln x_W = \ln(1 - x_S) \approx -x_S$

e ottenere: $k_B T x_S \approx \pi \langle v_W \rangle \approx \pi \frac{V_B}{N_W}$

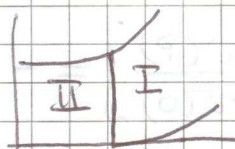
$$\parallel$$

$$k_B T \frac{N_S}{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_S k_B T \approx \pi V_B} \quad \text{VAN'T HOFF}$$

Formalmente è come la legge dei gas ideali ma non abbiamo mai parlato di gas ideali (acqua!!!). Questa legge funziona sorprendentemente bene per soluzioni diluite.

EFFETTO TERMOMECCANICO



^4He al di sotto di $T_\lambda = 2.19 \text{ K}$ si comporta come una miscela di due fluidi. Il primo (superfluido) può penetrare ovunque con attriti ~~che~~^{date} nessuno il gas di ^4He no. Il secondo (fluido normale) si comporta normalmente.

Il fatto che al superfluido non è associata entropia ha delle conseguenze molto interessanti.

Consideriamo 2 contenitori ~~ad~~ isolati e uniti fra loro da un capillare con attole che solo il superfluido può fluire.

Riempiamo i contenitori di ^4He a $T < 2.19 \text{ K}$.

Perché il sistema è chiuso e isolato abbiamo $N = \text{costante}$, $V = \text{cost.}$

Il potenziale termodinamico è l'energia interna $U(S, V, N)$

$$U = \sum_i^2 e_i N_i u_i \quad u_i = \text{energia per pila nel compartimento } i$$

All'equilibrio l'energia totale è al minimo $\Rightarrow$

$$\delta U_T = 0 = \sum_i^2 e (\delta N_e u_e + N_e \delta u_e) \quad (1)$$

(20)

Se assumiamo che il volume V_e e l'entropia S_e di ciascun compartimento è costante (cioè il sistema fluisce senza fare lavoro e senza scambiare calore) allora:

$$\begin{cases} S_e = N_e s_e \\ V_e = N_e v_e \end{cases}$$

$$\delta S_e = \delta N_e s_e + N_e \delta s_e = 0 \Rightarrow \delta s_e = -s_e \frac{\delta N_e}{N_e}$$

$$\delta V_e = \delta N_e v_e + N_e \delta v_e = 0 \Rightarrow \delta v_e = -v_e \frac{\delta N_e}{N_e}$$

ora u_e è solo funzione di variabili specifiche:
 ~~$u_e(S_e, V_e)$~~
 $u_e(s_e, v_e)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta u_e &= \left(\frac{\partial u_e}{\partial s_e} \right)_{v_e} \delta s_e + \left(\frac{\partial u_e}{\partial v_e} \right)_{s_e} \delta v_e = - \left[\left(\frac{\partial u_e}{\partial s_e} \right)_{v_e} s_e + \left(\frac{\partial u_e}{\partial v_e} \right)_{s_e} v_e \right] \frac{\delta N_e}{N_e} = \\ &= - \frac{\delta N_e}{N_e} [T_e s_e - p_e v_e] \quad \text{notando che } (1) \end{aligned}$$

$$0 = \sum_i^2 e [u_e - T_e s_e + p_e v_e] \delta N_e = 0$$

$$\text{ora abbiamo } \delta N = \delta N_1 + \delta N_2 = 0 \Rightarrow \delta N_1 = -\delta N_2$$

$$\text{inoltre } u - Ts + pV = G = \mu N \Rightarrow u - Ts + pV = \mu$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_1(T_1, P_1) = \mu_2(T_2, P_2)} \quad \text{CONDIZIONE DI EQUILIBRIO}$$

~~Però~~

NOTA: ~~Non~~ NON È RICHIESTA L'UGUAGLIANZA DI

T e P perché a) NON C'È TRASPORTO DI ENTROPIA

b) NON COMPIE LAVORO MECCANICO.

Con questa condizione possiamo variare la T e p in un contenitore in maniera da mantenere l'equilibrio

$$\Delta\mu = 0 = -s\Delta T + v\Delta P$$

$$s = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_p, \quad v = \left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{s}{v} \Delta T}$$

EFFETTO TERMO MECCANICO

(se i due recipienti mantengono in equilibrio)

~~ERROR~~

NOTA: a) SE C'E' ΔT TRA I DUE COMPARTIMENTI $\Rightarrow \Delta P$

b) POICHE' $s > 0, v > 0 \Rightarrow \Delta T > 0 \Rightarrow \Delta P$ ESSIA IL ~~ERRORE~~ SISTEMA A T MAGGIORE HA ANCHE P MAGGIORE.

c) SE INIZIALMENTE ABBIAMO $T_1 > T_2, P_1 = P_2$ IL SUPERFLUIDO FLUIRA' ~~DA 1 A 2~~ DAL SISTEMA 2 (PIU' FREDDO) AL SISTEMA 1 (PIU' CALDO) PER STABILIRE: $(P_1 - P_2)_{RE} = \frac{s}{v} (T_1 - T_2)$

Questo sembra violare la seconda legge della termodinamica che dice che il calore fluisce dal corpo piu' caldo al corpo piu' freddo. Però se il superfluido non trasporta calore (entropia) non c'è problema.

TERMODINAMICA DELLE TRANSIZIONI DI FASE

(21)

COESISTENZA DELLE FASI: GIBBS PHASE RULE

La maggior parte dei sistemi possono ammettere più fasi che hanno ore comportamenti macroscopici molto diversi.

La fase che si realizza per date condizioni termodinamiche è quella e ci corrisponde la minima energia libera (condizione di equilibrio).

Per alcuni particolari valori delle variabili indipendenti, due o più fasi possono coesistere. Esiste una semplice regola (di Gibbs) che stabilisce quante fasi possono coesistere per un dato sistema.

Alla coesistenza le varie fasi sono in equilibrio termico, meccanico e chimico (come possono scambiare materia).

Quindi T e μ delle ^{varie} ~~due~~ fasi sono uguali e anche Y .

~~Per il sistema PVT μ~~

Consideriamo ΣYXT puro (come con una sola componente).

Due fasi A, B coesistono a T, Y ~~costa~~ fissati se

$$\mu^A(T, Y) = \mu^B(T, Y)$$

questa equazione definisce una dipendenza di Y da T nel luogo dei punti in cui le fasi sono in coesistenza: $Y = Y(T)$

Nel piano $Y-T$ questa è una varietà a 1 dimensione.

Se il sistema puro ha 3 fasi in coesistenza:

$$\mu^A(T, Y) = \mu^B(T, Y) = \mu^C(T, Y)$$

$\Rightarrow$ 2 equazioni in due variabili T, Y e quindi sul p.t. individuiamo una varietà a dimensione 0

sono 1 punto.

Ne segue che: PER UN SISTEMA A UNA COMPONENTE NON E' POSSIBILE AVERE PIU' DI TRE FASI IN COESISTENZA

MISCELA DI e COMPONENTI: ~~non si possono avere tre fasi in coesistenza. Avremo~~

$2 + e - 1$ variabili indipendenti (intensive)

$$(T, P, x_1, \dots, x_{e-1}) \quad \left(\sum_{i=1}^e x_i = 1 \right)$$

Consideriamo r fasi in coesistenza: il pot chimico di ogni singola specie nelle varie fasi deve essere uguale.

$$\begin{cases} \mu_1^I(T, P, x_1^I, \dots, x_{e-1}^I) = \mu_1^II(T, P, x_1^{II}, \dots, x_{e-1}^{II}) = \dots = \mu_1^r(T, P, x_1^r, \dots, x_{e-1}^r) \\ \vdots \\ \mu_e^I(T, P, x_1^I, \dots, x_{e-1}^I) = \dots = \mu_e^r(T, P, x_1^r, \dots, x_{e-1}^r) \end{cases}$$

sono $e(r-1)$ equazioni in $2 + r(e-1)$ incognite

Per poter avere soluzione deve essere:

~~non si possono avere tre fasi in coesistenza. Avremo~~

$$\#eq \leq \#incog.$$

$$er - e \leq 2 + r(e-1) \Rightarrow \boxed{r \leq e + 2}$$

REGOLA DELLE
FASI DI GIBBS

$$\boxed{e=2 \Rightarrow r \leq 4}$$

CLASSIFICAZIONE DELLE TRANSIZIONI DI FASE

La condizione di coesistenza delle fasi ci dice che il potenziale chimico delle varie fasi deve essere uguale alla coesistenza.

Sappiamo che l'energia di Gibbs è: $G(T, Y, N_1, \dots, N_e) = \sum_j N_j \mu_j$

Per un processo a T e Y costante

$$(dG)_{T,Y} = \sum_j \mu_j dN_j \Rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{T,Y, \{N_{k \neq j}\}} = \mu_j$$

Quindi alla coesistenza:

$$\begin{cases} G^I = G^{II} = \dots = G^r \\ \mu_j^I = \mu_j^{II} = \dots = \mu_j^r \end{cases} \quad \forall j = 1, e$$

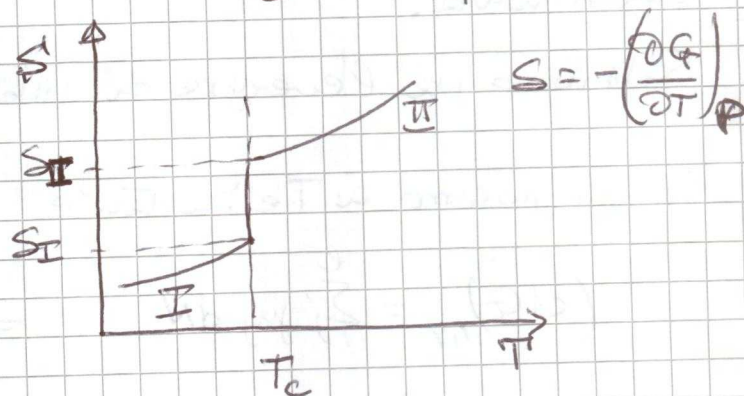
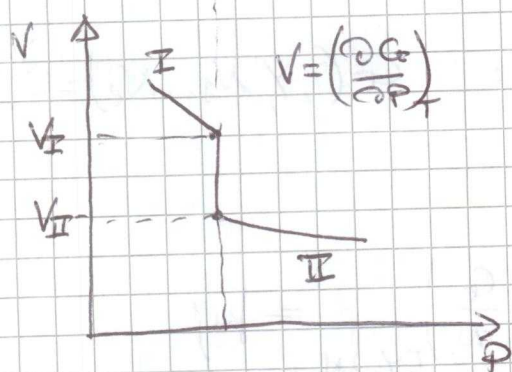
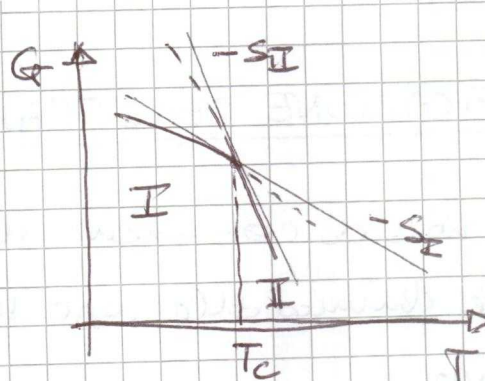
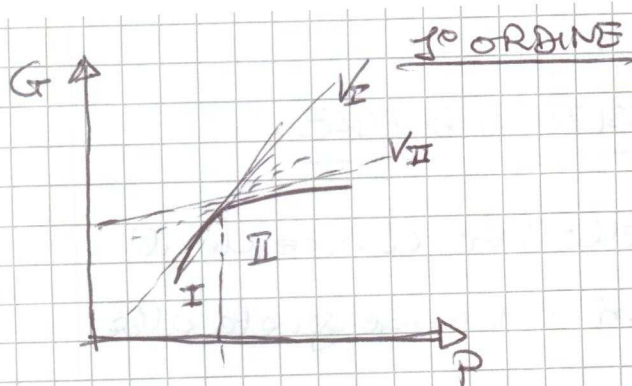
come l'energia libera è uguale e anche le derivate rispetto a N_j sono uguali.

Tuttavia non vi sono restrizioni alle derivate rispetto alle altre variabili interne T, Y .

La classificazione delle transizioni di fase si fa generalmente in base al comportamento di queste derivate.

$\Rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{Y, \{N_j\}}$ e $\left(\frac{\partial G}{\partial Y} \right)_{T, \{N_j\}}$ sono discontinue $\Rightarrow$ TRANSIZIONE DEL 1° ORDINE

$-\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{Y, \{N_j\}} = S$; $\left(\frac{\partial G}{\partial Y} \right)_{T, \{N_j\}} = X$ sono continue $\Rightarrow$ TRANSIZIONE CONTINUA
ma derivate di ordine superiore sono discontinue



Poiché $G^I(T, P, N) = G^{II}(T, P, N)$

ma

$$\begin{cases} S^I - S^{II} = \Delta S \neq 0 \\ V^I - V^{II} = \Delta V \neq 0 \end{cases}$$

da $H = G + TS$

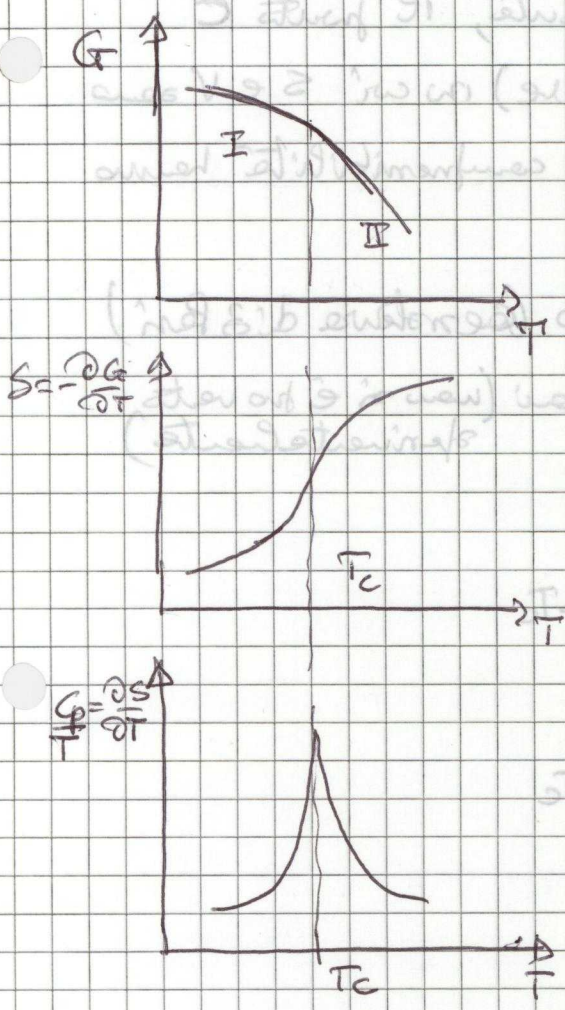
$$\Rightarrow \Delta H = \Delta G + T \Delta S + S \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta H = T \Delta S = H^I - H^{II} \neq 0}$$

ALLA TRANSIZIONE
DEL 1° ORDINE

$$\boxed{\Delta H = \text{CALORE LATENTE}}$$

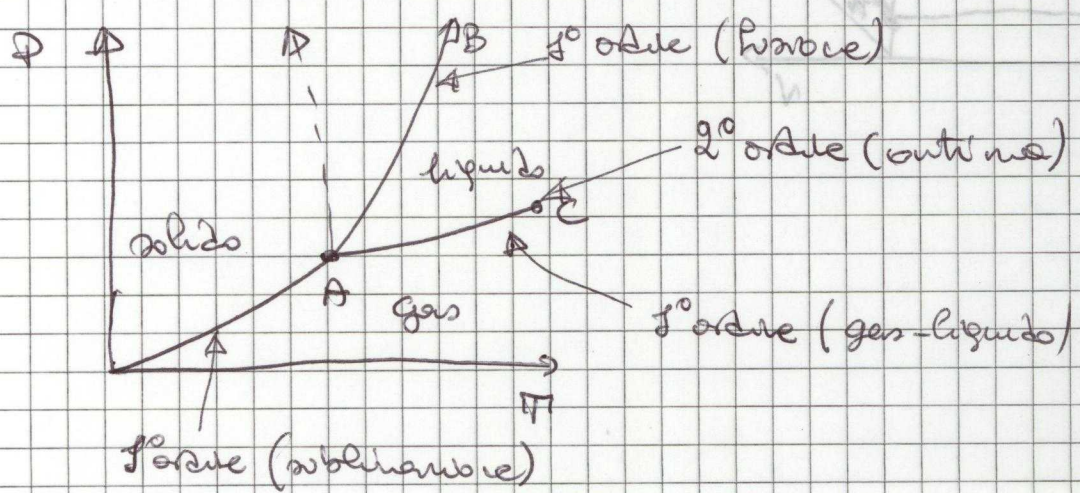
TRANSIZIONE CONTINUA



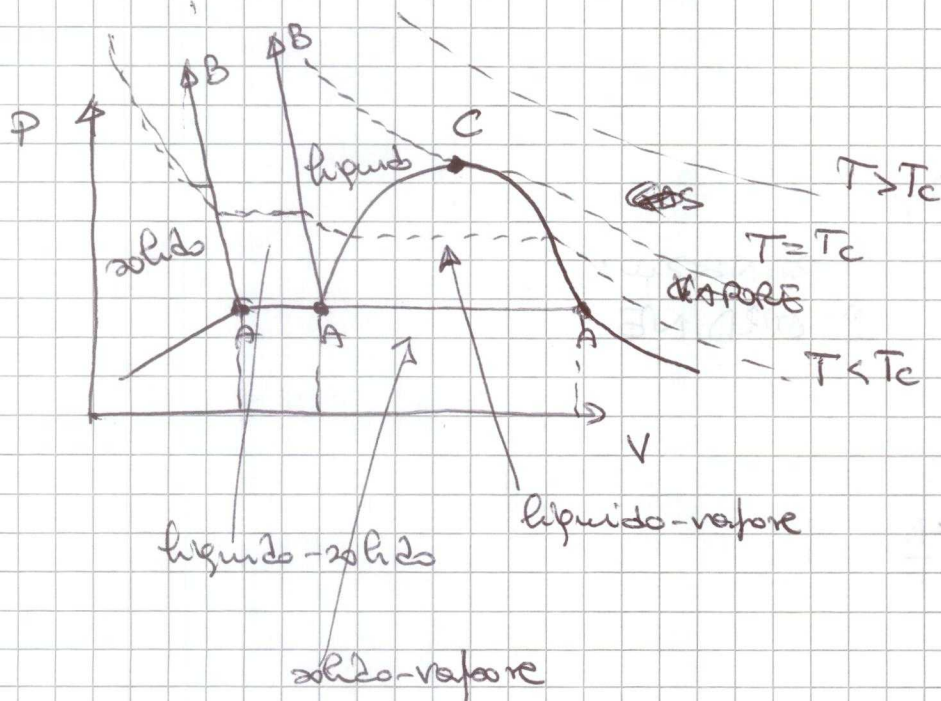
TRANSIZIONE
1° ORDINE

SISTEMA PVT PURO

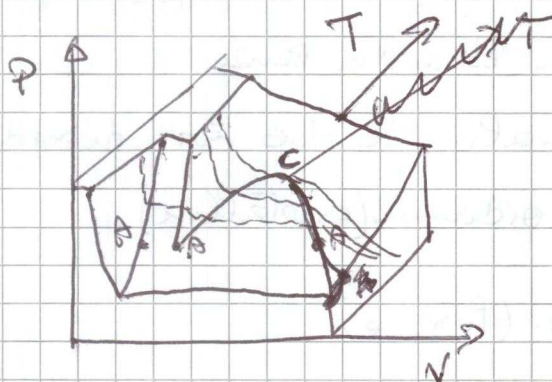
I componenti, delle cui interazioni a corto range repulsive a corto distanza, attrattive a "lunga" distanza. Questo sistema presenta generalmente due fasi disordinate (gas, liquido) e varie fasi ordinate (cristalline).



- le righe continue sono linee di punti di transizione del 1° ordine con associato calore latente, il punto C è il cosiddetto punto critico (2° ordine) in cui S e V sono continui ma i calori specifici o le compressibilità hanno una discontinuità,
- il punto A è il solo punto triplo (coesistenza di 3 fasi)
- la linea di Rombic non termina mai (non si è potuta sperimentare)



Questi diagrammi sono proiezioni bidimensionali di
 superfici a 3 dimensioni:



EQUAZIONE DI CLAUDIUS-CLAPEYRON

(24)

Se, partendo da un punto su una curva di coesistenza tra due fasi I e II, ci muoviamo sulla stessa curva dobbiamo avere

$$d\mu^I = d\mu^{II}$$

~~Però~~ Dalle relazioni di Gibbs-Duhem si ha

$$\boxed{d\mu = -s dT + v dp}$$

$$d\mu^I = -s^I dT + v^I dp$$

$$d\mu^{II} = -s^{II} dT + v^{II} dp$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{coex}} = \frac{s^{II} - s^I}{v^{II} - v^I}}$$

CLAUDIUS-CLAPEYRON

Consideriamo ora l'entalpia per unità cella

$$h(T, p) \quad dh = T ds + v dp$$

~~ad ogni punto di coesistenza~~

ad ogni punto di coesistenza

$$h^{II} - h^I = T(s^{II} - s^I)$$

$$\Rightarrow (\Delta s)_{\text{coex}} = \frac{(\Delta h)_{\text{coex}}}{T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{coex}} = \frac{\Delta h}{T \Delta v} = \frac{h^{II} - h^I}{T(v^{II} - v^I)}}$$

$\frac{\Delta h}{T}$ = calore latente di transizione

Tramite l'eq. di Clausius-Clapeyron possiamo ottenere delle equazioni per le curve di coesistenza.

Finché $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) < 0$ il sistema non meccanamente

(25)

stabile ma non corrisponde a stati di minimo dell'energia libera, quindi a stati di vero equilibrio termodinamico.

Stati che A lungo le linee tratteggiate corrispondono a STATI DI VAPORE SOTTO-RAFFREDDATO, mentre stati che B sono STATI DI LIQUIDO SUPER-RISCALDATO.

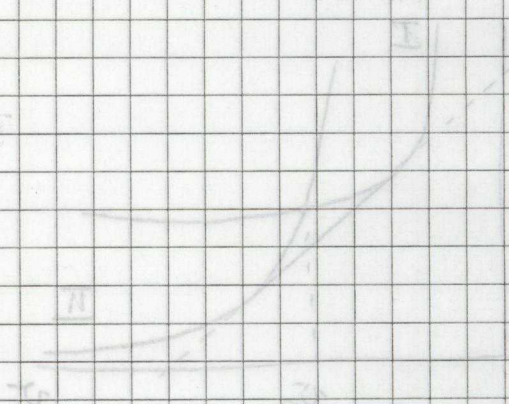
Avvicinandosi al punto critico la zona degli stati meta stabili diventa sempre più piccola e sparisce a C.

Questa zona è detta ZONA SPINDALE (stabile non vero di equilibrio).

LEGGE DEGLI STATI CORRISPONDENTI: per tutti i fluidi chimici puri, la curva BINDALE è la stessa in coordinate ridotte $(v/v_c, T/T_c)$:

Si trova che lungo la ~~bin~~ binale:

$$\begin{cases} \frac{p_e + p_g}{2p_c} = 1 + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \\ \frac{p_e - p_g}{p_c} = \frac{7}{2} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/3} \end{cases}$$



DESCRIZIONE DELLA COESISTENZA CON HELM HOLTZ

(256)

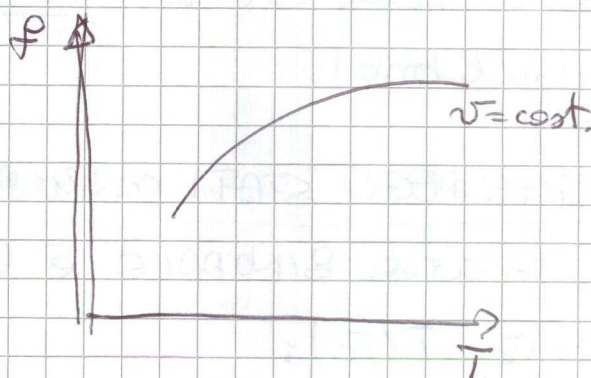
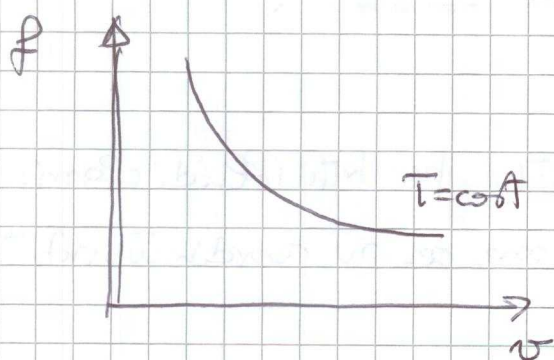
Dalle relazioni termodinamiche:

MAXWELL

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p$$

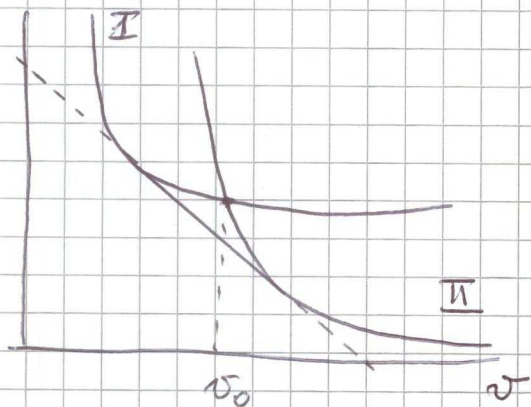
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V = -\frac{C_V}{T} \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T = \frac{1}{V\chi_T}$$

$\Rightarrow$ $F(T, V)$ a V costante è CONCAVA ($C_V > 0$)
 $F(T, V)$ a T costante è CONVESSA ($\chi_T > 0$)



Consideriamo due fasi I e II e l'intersezione delle due superfici $F_I(T, V)$, $F_{II}(T, V)$ che rappresentano queste fasi.

A $T = \text{costante}$ (isoterma) si avrà un punto di intersezione



V_0 che non rappresenta la coesistenza perché alla coesistenza i volumi delle due fasi sono generalmente diversi. Tuttavia possiamo ancora determinare la coesistenza attraverso F .

In fatti $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$

quindi in ogni punto la tangente a $F(V, T = \text{cost})$ è una retta di eq:

$$\bullet f(v) = f(0) - p v \Rightarrow f(0) = f(v) + p v$$

ma $F + PV = G$ energia di Gibbs, ~~de~~

$$e \quad G = \mu N \Rightarrow f(0) = \boxed{\mu = f(v) + p v}$$

Quindi i valori di v_I e v_{II} alla coesistenza corrispondono ai punti sulle due curve che hanno tangente comune perché questo implica ~~de~~ l'uguaglianza dei potenziali chimici delle due fasi

$$\boxed{\mu_I = \mu_{II}}$$

L'energia di Helmholtz del sistema è quindi rappresentata dalla ~~funzione~~ $I(f_1)$ ~~per~~ $v \leq v_1$

$$\begin{cases} f(v) = f_I(v) & v \leq v_1 \\ f(v) = \left(\frac{v - v_1}{v_2 - v_1} \right) f_I(v_1, v_2) + v_2 & v_1 < v < v_2 \\ f(v) = f_{II}(v) & v_2 \leq v \end{cases}$$

EQUAZIONE DI VAN DER WAALS

(266)

Scritta in termini del volume per molecola questa è:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = k_B T$$

dove a, b sono parametri
fenomenologici,

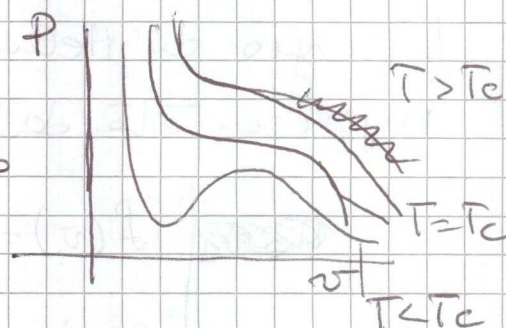
$$a, b > 0$$

esplicitando p si ottiene:

$$p = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

Le isoterme di compressione a queste equazioni hanno
l'aspetto:

Riscriviamo l'equazione esplicitando
la v :



$$(p v^2 + a)(v-b) = v^2 k_B T$$

$$v^3 - v^2 \left(b + \frac{k_B T}{p}\right) + v \frac{a}{p} - \frac{ab}{p} = 0$$

~~Questa equazione~~ è un'equazione di terzo grado
i cui coefficienti dipendono da T e p .

Al variare di p si possono avere 3 radici reali ($T < T_c$),
3 radici coincidenti ($T = T_c$), 1 radice reale e 2 ~~pure~~ ($T > T_c$)
Queste radici individuano i punti in cui la curva
 $v(p, T)$ interseca la retta orizzontale p .

Alle T_c abbiamo 3 radici coincidenti:

$$(v - v_c)^3 = v^3 - v^2 \left(b + \frac{k_B T_c}{p_c}\right) + v \frac{a}{p_c} - \frac{ab}{p_c} = 0$$

(27)

$$v^3 - 3v_c v^2 + 3v v_c^2 - v_c^3 = 0$$

$$\Rightarrow 1) 3v_c = b + \frac{kT_c}{P_c}$$

$$2) 3v_c^2 = \frac{a}{P_c}$$

$$3) v_c^3 = \frac{ab}{P_c}$$

$$\Rightarrow \frac{v_c^3}{3v_c^2} = \frac{ab}{P_c} \frac{P_c}{a} = b$$

$$\boxed{v_c = 3b}$$

$$\text{da } ② \Rightarrow P_c = \frac{a}{3(3b)^2} = \frac{a}{27b^2}$$

$$\boxed{P_c = \frac{a}{27b^2}}$$

$$\text{da } ① \quad T_c = \frac{P_c}{k_B} (3v_c - b) = \frac{a}{27b^2} \frac{1}{k_B} (9b - b) = \frac{8a}{27b^2 k_B}$$

$$\boxed{k_B T_c = \frac{8a}{27b}}$$

Riserva ora l'equazione intermini di $\pi = \frac{P}{P_c}$, $w = \frac{v}{v_c}$, $\theta = \frac{T}{T_c}$

$$\left(\pi P_c + \frac{a}{w^2 v_c^2} \right) (w v_c - b) = k_B \theta T_c$$

$$\left(\pi \frac{a}{27b^2} + \frac{a}{w^2 9b^2} \right) (w 3b - b) = \theta \frac{8a}{27b}$$

$$\frac{a}{27b} \left[\left(\pi + \frac{3}{w^2} \right) (3w - 1) = 8\theta \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = \frac{8\theta}{3w-1} - \frac{3}{w^2}}$$

vd π in variabili
ridotte

NOTE:

(276)

eq. ridotta è indipendente da $a, b \Rightarrow$ verifica la legge degli stati corrispondenti

- per $T < T_c$ la curva $\pi(w)$ ha una regione in cui

$\left(\frac{\partial \pi}{\partial w}\right)_T > 0$ ossia di instabilità. Queste parti può essere rimosse con la COSTRUZIONE DI MAXWELL.

- la COSTRUZIONE DI MAXWELL deve essere usata per determinare la pressione di VAPORE, ossia la pressione di coesistenza a T fissata.

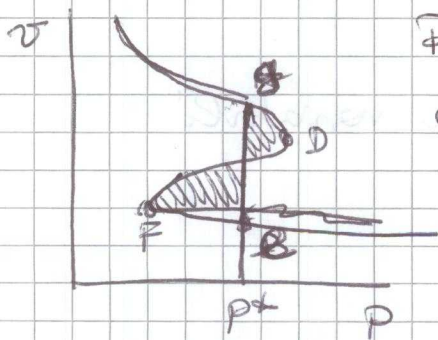
Da Gibbs-Duhem: $dg = d\mu = -sdT + vdp$

lungo una isoterma $dT=0 \Rightarrow d\mu_T = vdp$

la condizione di coesistenza ci impone $\mu_g = \mu_l$ alle coesistenza $\Rightarrow$

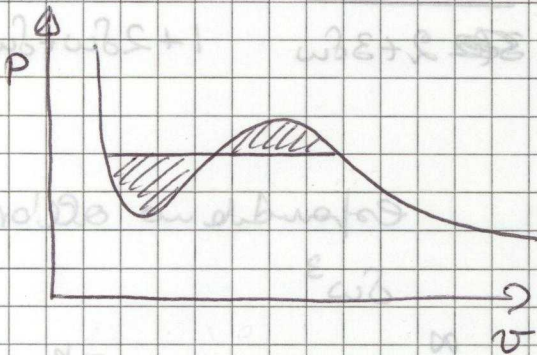
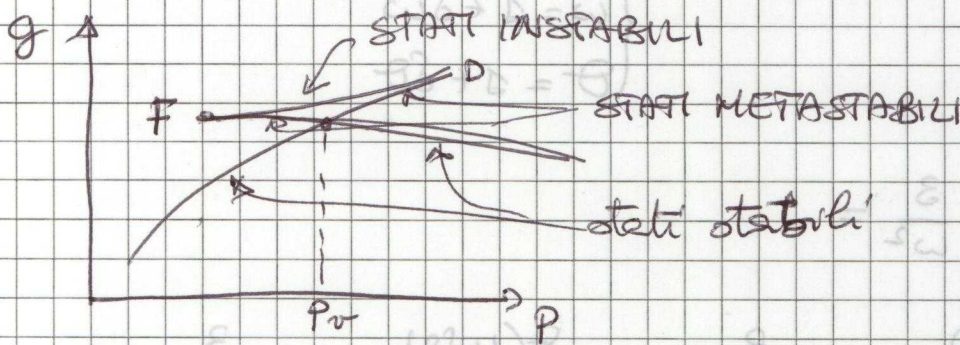
$$\int_g^l v dp = \mu_l - \mu_g = 0$$

quindi a $T < T_c$ dobbiamo trovare p_v al valore a cui l'integrale lungo l'isoterma di VdV fornisce lo stesso valore dell'integrale lungo una isoterma tagliata dalla retta P_v .



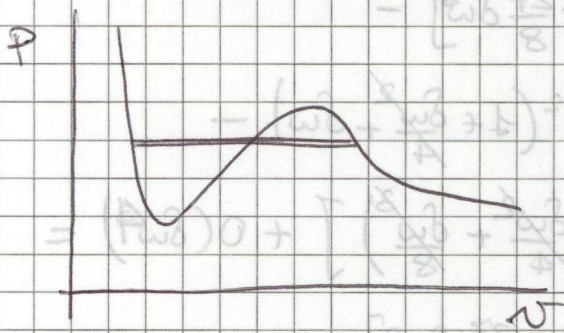
Perché la transizione avviene a $\Delta\mu=0$ questo si riduce nel fatto che l'integrale per la retta verticale p^* è nullo.

lo stesso deve essere per l'integrale da g a l lungo l'isoterma di v.d.V. Questo significa che le aree tratteggiate devono essere uguali. Questa condizione individua la pressione di vapore p_v a data T .

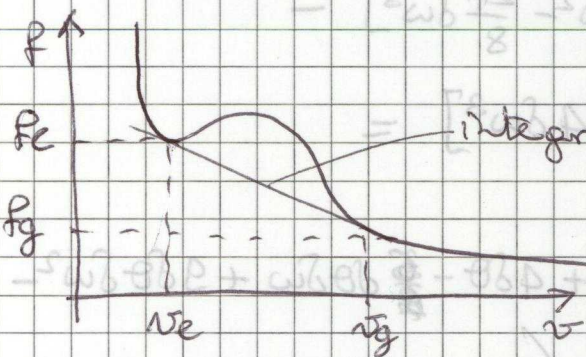


UGUAGLIANZA DELLE AREE
COMPRESSE TRA L'ISOTERMA E
LA RETTA PRESSIONE DI VAPORE

HELMHOLTZ: $F(T, v) \rightarrow df = -sdt + p dv$



$$dT=0 \rightarrow df = -p dv$$



integrale del tratto di retta orizzontale

$$p_v = \frac{-(p_g - p_e)}{(v_g - v_e)}$$

COMPORTAMENTO VICINO AL PUNTO CRITICO

Esploriamo l'eq. di vdW intorno a C: ~~$\pi = \theta = \omega = 1$~~

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right) \left(\omega - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \theta$$

$$\begin{cases} \pi = 1 + \delta\pi \\ \omega = 1 + \delta\omega \\ \theta = 1 + \delta\theta \end{cases}$$

$$\pi = \frac{8\theta}{3\left(\omega - \frac{1}{3}\right)} - \frac{3}{\omega^2} =$$

$$1 + \delta\pi = \frac{8(1 + \delta\theta)}{3(1 + \delta\omega) - \frac{1}{3}} - \frac{3}{(1 + \delta\omega)^2} = \frac{8(1 + \delta\theta)}{2 + 3\delta\omega} - \frac{3}{1 + 2\delta\omega + \delta\omega^2} =$$

$$= \frac{4(1 + \delta\theta)}{1 + \frac{3}{2}\delta\omega} - \frac{3}{1 + 2\delta\omega + \delta\omega^2}$$

esploriamo all'ordine $\delta\omega^3$

$$1 + \delta\pi \approx 4(1 + \delta\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\delta\omega\right)^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[-2\delta\omega\left(1 + \frac{\delta\omega}{2}\right)\right]^n =$$

$$= 4(1 + \delta\theta) \left[1 - \frac{3}{2}\delta\omega + \frac{9}{4}\delta\omega^2 - \frac{27}{8}\delta\omega^3\right] -$$

$$- 3 \left[1 - 2\delta\omega\left(1 + \frac{\delta\omega}{2}\right) + 4\delta\omega^2\left(1 + \frac{\delta\omega}{2} + \delta\omega\right) -$$

$$- 8\delta\omega^3\left(1 + 3\frac{\delta\omega}{2} + 3\frac{\delta\omega^2}{4} + \frac{\delta\omega^3}{8}\right)\right] + O(\delta\omega^4) =$$

$$= 4(1 + \delta\theta) \left[1 - \frac{3}{2}\delta\omega + \frac{9}{4}\delta\omega^2 - \frac{27}{8}\delta\omega^3\right] -$$

$$- 3 \left[1 - 2\delta\omega + 3\delta\omega^2 - 4\delta\omega^3\right] =$$

$$= 4 - 6\delta\omega + 9\delta\omega^2 - \frac{37}{2}\delta\omega^3 + 4\delta\theta - \frac{3}{2}\delta\theta\delta\omega + 9\delta\theta\delta\omega^2 -$$

$$- \frac{27}{2}\delta\theta\delta\omega^3 - 3 + 6\delta\omega - 9\delta\omega^2 + 12\delta\omega^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\pi = -\frac{3}{2}\delta\omega^3 + \delta\theta \left[4 - 6\delta\omega + 9\delta\omega^2 - \frac{27}{2}\delta\omega^3\right]}$$

Nel termine con $\delta\theta$ è sufficiente tenere solo il termine lineare in $\delta\omega$

$$\boxed{\delta\pi \approx -\frac{3}{2}\delta\omega^3 + \delta\theta[4 - 3\delta\omega]} =$$
$$= -\frac{3}{2}\delta\omega^3 + 4\delta\theta - 3\delta\theta\delta\omega$$

① ISOTERMA CRITICA: $\delta\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \delta\pi = -\frac{3}{2}\delta\omega^3 \propto \delta\omega^3$

$$\Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \pi} \right)_\theta = -\frac{1}{\omega} \frac{2}{3\delta\omega^2} \propto \delta\omega^{-2} \quad \delta=3 \quad \left(\begin{array}{l} \delta > 4 \\ \text{per } \mu \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \chi_T$ diverge al punto critico lungo l'isoterma critica come $\delta\omega^{-2}$

$$\boxed{\chi_T \sim \frac{1}{\delta\omega^2} \sim \frac{1}{(\delta\pi)^{2/3}}$$

② LINEA DI COESISTENZA

lungo la coesistenza $P_v = P_l(T) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \delta\pi = 4\delta\theta \\ \frac{3}{2}\delta\omega^3 + 6\delta\theta\delta\omega = 0 \end{cases}$$

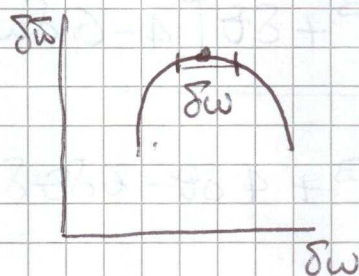
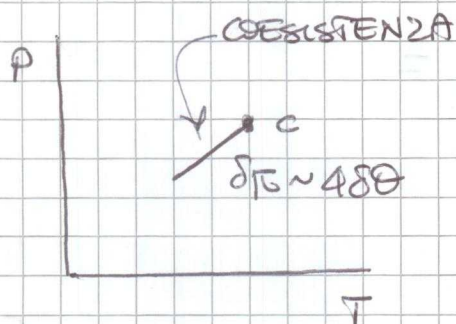
Le radici della seconda equazione sono le intersezioni dell'isoterma $T = T_c + \delta\theta$ con la retta isobara $P = P_c + \delta\pi$

$$\begin{cases} \delta\omega = 0 \\ \delta\omega^2 + 4\delta\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\omega = 0 \\ \delta\omega_{\pm} = \pm \sqrt{-4\delta\theta} = \pm 2\sqrt{-\delta\theta} \end{cases}$$

NOTA: le radici sono reali solo se $\delta\theta < 0$ (sotto T_c)

$$\begin{cases} \delta\omega_g = \delta\omega_+ = 2\sqrt{-\delta\theta} \\ \delta\omega_e = \delta\omega_- = -2\sqrt{-\delta\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta w = \delta w_g - \delta w_e = 4 \sqrt{-\delta\theta} \propto |\delta\theta|^\beta \quad \beta = 1/2$$



COMPRESSIBILITA' ISOTERMA A P_c :

$$\delta\pi = -\frac{3}{2}\delta w^3 + \delta\theta[4 - 6\delta w] \Rightarrow \frac{\partial(\delta\pi)}{\partial(\delta w)} = -\frac{9}{2}\delta w^2 - 6\delta\theta$$

$$\delta w \chi_T = - \frac{1}{\frac{\partial(\delta\pi)}{\partial(\delta w)}} = \frac{1}{\frac{9}{2}\delta w^2 + 6\delta\theta}$$

o zero su $P = P_c$ limito $\delta w = 0$

$$\Rightarrow \delta\theta = \frac{3}{2} \frac{\delta w^3}{(4 - 6\delta w)} \approx \frac{3}{8} \delta w^3 \Rightarrow \delta w \approx \left(\frac{8}{3} \delta\theta\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow w \chi_T = \frac{1}{\frac{9}{2} \left(\frac{8}{3} \delta\theta\right)^{2/3} + 6\delta\theta} \approx (\delta\theta)^{-1/3}$$

NOTA: ABBIAMO TROVATO CHE LUNGO LA BINODALE

$$\delta w \sim |\delta\theta|^\beta \quad \beta = 1/2 \quad \text{PREDIZIONE DI VDW}$$

SPERIMENTALMENTE $\beta = 1/3$

FALLIMENTO DELLA TEORIA DI VDW AL PUNTO CRITICO

LA SPIEGAZIONE E LA FORMULAZIONE DELLA TEORIA
DEI FENOMENI CRITICI E' UNO DEI CAPITOLI PIU' BELLI DELLA } FISICA MODERNA

TENSIONE SUPERFICIALE

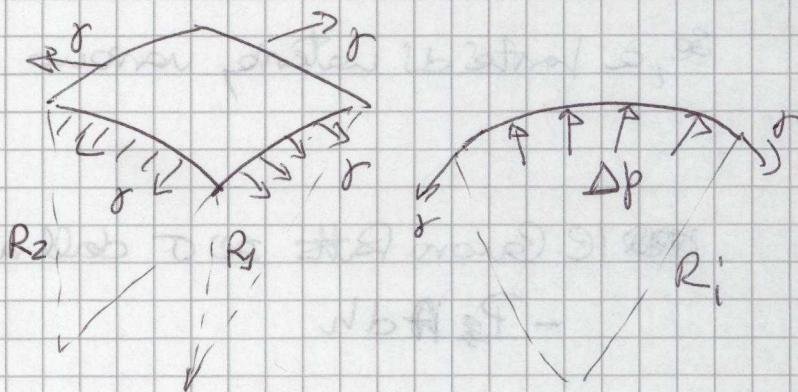
È l'energia libera per unità di area del sistema ad una superficie tra liquido e vapore o ad una interfaccia tra fluidi immiscibili.

La sua origine deriva dallo sbilanciamento delle forze di Van der Waals attrattive delle molecole alla superficie. Le molecole sono alla superficie tra liquido e vapore sentono un'attrazione maggiore verso il bulk di quella che sentirebbero se ci fosse il bulk anche oltre la superficie.

Per descrivere la tensione superficiale possiamo fare l'analogia con una membrana ~~stretta~~ tesa, e la sua energia elastica, in cui una tensione superficiale, σ , agisce tangente alla superficie.

Per una superficie curvilinea, che può essere descritta da due raggi di curvatura (R_1 e R_2), la differenza di pressione tra le ~~superfici~~ due regioni separate dall'interfaccia è:

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}$$

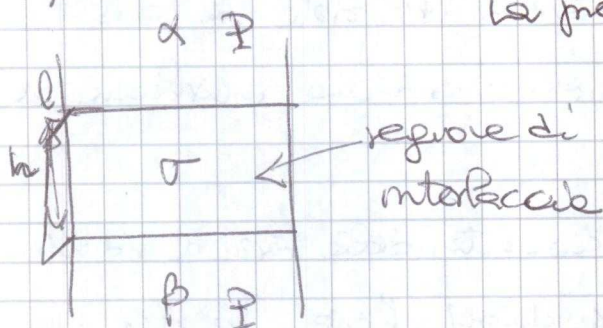


Note: superficie piana

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta p = 0$$

Per una interfaccia piana la differenza di pressione nelle due regioni ortogonali alla superficie si annulla.

Consideriamo una regione di interfaccia fra due liquidi di bulk.



La pressione nelle fasi di bulk è la stessa in tutte le direzioni (Pascal). Tuttavia nelle regioni σ non è così. Essa rimane la stessa nella direzione $\perp$ alla superficie ma non è così in direzione $\parallel$ alla superficie.

$$V^\sigma = h A$$

↑
area superficie

In σ $\left\{ \begin{array}{l} P_\perp = P_{\text{bulk}} \\ P_\parallel \neq P_\perp \end{array} \right.$ $\rightarrow$ nel caso di σ prendiamo un pezzo la forma rettangolare σ $P_\perp h e - P_\parallel e = P_\parallel h e$

f è la tensione superficiale.

$$f = \frac{P_\perp - P_\parallel}{h}$$

Se, a fronte di variazioni, variano $h \rightarrow h + dh$
 $A \rightarrow A + dA \Rightarrow V^\sigma \rightarrow V^\sigma + dV^\sigma$

Il lavoro fatto su σ dalla forza $\perp$ alla superficie è $-P_\perp A dh$

Il lavoro fatto su σ da forza $\parallel$ alle Σ è: $-(P_\parallel - f) dA$

$$\Rightarrow dW = -P_\perp A dh - (P_\parallel - f) dA = -P (A dh + h dA) + f dA$$

$$= -P dV^\sigma + f dA$$

$$\Rightarrow dF^\sigma = -S^\sigma dT - P dV^\sigma + f dA + \sum_i \mu_i dN_i^\sigma$$

(34)

$$\boxed{F^\sigma + PV^\sigma - \gamma A = \sum_i \mu_i N_i^\sigma} = G^\sigma$$

$$dG = -S^\sigma dT + V^\sigma dp^\sigma - A d\gamma + \sum_i \mu_i dN_i^\sigma$$

Possiamo spostare le superfici che delimitano l'interfaccia senza cambiare le relazioni termodinamiche per l'energia libera. In particolare Gibbs ha scelto la condizione in cui le due superfici coincidono e $V^\sigma = 0$

In questo caso il termine aggiuntivo è proveniente dall'interfaccia e ~~non~~ dipende da una certa regione interfaciale a favore delle regioni di bulk circostanti.

In questo caso l'energia libera dell'interfaccia diventa:

$$dF^\sigma = -S^\sigma dT + \gamma dA + \sum_i \mu_i dN_i^\sigma$$

$$dG^\sigma = ~~-S^\sigma dT~~ - S^\sigma dT + \gamma dA + \sum_i \mu_i dN_i^\sigma$$

GIBBS-DUHEM: $d[G - \gamma A] = -S^\sigma dT - A d\gamma + \gamma dN^\sigma - \mu dN^\sigma$

$$-N^\sigma d\mu = 0$$

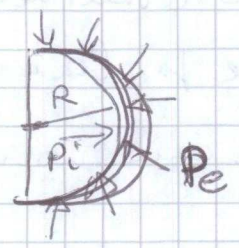
$$d\mu = -\frac{S^\sigma}{N^\sigma} dT - \frac{A}{N^\sigma} d\gamma$$

N^σ = numero di particelle nella superficie.

PRESSIONE INTERNA AD UNA ~~SECCA~~ GOCCIA (WILCOX)

Potremmo bilanciare le forze per ottenere la tensione superficiale. ~~Per~~ Consideriamo una goccia di raggio R .

La pressione all'interno è maggiore a quella all'esterno, la differenza è apportata dalla tensione superficiale.



Bilancio delle forze al piano equatoriale:

$$\sum F = p_i \pi R^2 - p_e \pi R^2 - 2\pi R \gamma = 0$$

$$p_i = p_e + \Delta p$$

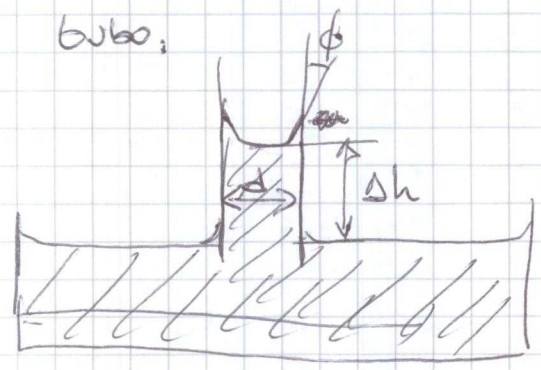
$$\Rightarrow \Delta p \pi R^2 = 2\pi R \gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta p = \frac{2\gamma}{R}}$$

LAPLACE

AZIONE CAPILLARE (WILCOX)

Un tubo di diametro d è immerso in un contenitore pieno di liquido a densità ρ . Il fluido sale nel capillare di un'altezza Δh . Questo fenomeno si spiega con la tensione superficiale alla ~~interfaccia liquido-solido~~ ^{superficie libera del tubo} (libera) che oppone il peso della ~~liquida~~ colonna di fluido. La tensione superficiale è tangente alla superficie a cui agisce e quindi se la superficie forma un angolo ϕ con la superficie ~~del~~ l'interno del tubo.



La ~~forza~~ componente verticale della forza che viene dalla tensione superficiale deve bilanciare la forza peso della colonna;

$$\pi d \gamma \cos \phi = \rho g \Delta h (\pi d^2 / 4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{4\gamma}{\rho g d} \cos \phi}$$

altezza media

L'angolo ϕ è detto $\phi = \begin{cases} \text{ANGOLO DI CONTATTO} \\ \text{ANGOLO DI WETTING} \end{cases}$

(32)

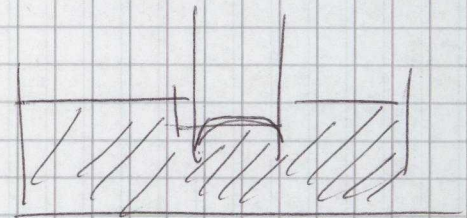
- $\phi < 90^\circ$ ~~il fluido sale~~ il fluido sale nel tubo

$\phi > 90^\circ$ il fluido non sale nel tubo anzi il suo livello scende rispetto al livello nel contenitore ($\Delta h < 0$)

esempi: H_2O $\phi \approx 0^\circ$ $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$

Hg $\phi \approx 129^\circ$ $\gamma = 0.466 \text{ N/m}$ $\rho = 13550 \text{ kg/m}^3$

$$\frac{\Delta h}{d} = \begin{cases} \text{30 mm } H_2O \text{ sale} \\ -9 \text{ mm } Hg \text{ scende} \end{cases}$$



35

1. The first part of the problem is to find the value of x such that $x^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

2. The second part of the problem is to find the value of y such that $y^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $y = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

3. The third part of the problem is to find the value of z such that $z^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $z = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

4. The fourth part of the problem is to find the value of w such that $w^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $w = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

5. The fifth part of the problem is to find the value of v such that $v^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $v = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $v = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

6. The sixth part of the problem is to find the value of u such that $u^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $u = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

7. The seventh part of the problem is to find the value of t such that $t^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $t = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

8. The eighth part of the problem is to find the value of s such that $s^2 + 1 = 0$. This is a quadratic equation, and we can solve it by using the quadratic formula. The quadratic formula is $s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. In this case, $a = 1$, $b = 0$, and $c = 1$. So, the solutions are $s = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$.

FACCIAMO L'ASSUNZIONE CHE POSSIAMO DEFINIRE UNA SCALA DI LUNGHEZZE INTERMEDIE λ : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \gg l \text{ (distanze medie tra file)} \\ \lambda \ll L \text{ (dimensioni globali del sistema)} \end{array} \right.$

IN QUESTA SCALE POTREMO DEFINIRE I CAMPI CHE DESCRIVONO IL NOSTRO SISTEMA COME CAMPI CONTINUI MA LOCALI, ES: PRESSIONE, TEMPERATURA ETC.

PROBLEMA PER FARE A SISTEMI LONTANI DALL'EQUILIBRIO TERMODINAMICO. NELL'IPOTESI CHE CI SIA PER P.E. UN NUMERO RIDOTTO DI CAMPI RAPPRESENTINO LO STATO DEL SISTEMA ~~potremo descriverle~~ ~~le~~ SARANNO COME CAMPI CHE DIPENDERANNO ESPlicitAMENTE DALLO SPAZIO E DAL TEMPO

EQUILIBRIO LOCALE

COME PER LA TERMODINAMICA GLOBALE, POICHE' I SISTEMI DI DIMENSIONE λ^3 SONO COMunque GRANDI POSSIAMO DESCRIVERLI CON VARIABILI DI STATO LOCALI. FAREMO L'ASSUNZIONE CHE VALE L'EQUILIBRIO LOCALE Ossia

$$\text{Es locale: } T(r, t), p(r, t) \quad P = P(T, p) \\ p(r, t) = p(T(r, t), p(r, t))$$

ovvero le variabili di stato dipendono dallo spazio e dal tempo solo attraverso la dipendenza delle variabili di stato indipendenti.

QUESTE DUE IPOTESI CI PERMETTONO DI

PASSARE DALLA VARIABILI TERMODINAMICHE A CAMPI
TERMODINAMICI CONTINUI NELLO SPAZIO E NEL TEMPO

Esempio: all'eq. abbiamo $dp = \rho [\chi_T dp - \alpha_p dT]$

Eq locale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} = \rho(\vec{r}, t) \left[\chi_T \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} - \alpha_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \nabla_r p(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) [\chi_T \nabla_r p(\vec{r}, t) - \alpha_p \nabla_r T(\vec{r}, t)] \end{array} \right.$$

Definizione: un fluido non può sostenere una forza di taglio per ogni intervallo di tempo.
Quindi ogni forza di taglio cederà ~~il~~ un flusso di materiale in seno al fluido.

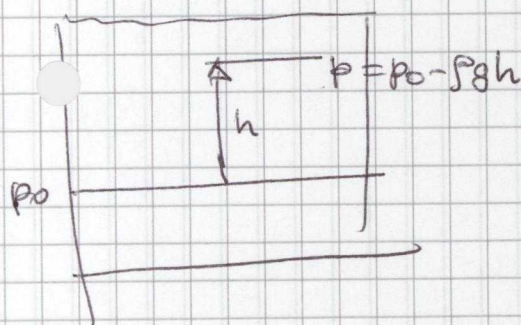
PER UN FLUIDO IN EQUILIBRIO STATICO: LE FORZE DI TAGLIO SONO NULLE, QUINDI GLI STRESS SONO SEMPRE PERPENDICOLARI AD OGNI SUPERFICIE INTERNA AL FLUIDO $\xrightarrow{\text{PASCAL}}$ PRESSIONE E' ISOTROPA

PRESENZA DELLA GRAVITA': ~~$p + \rho g h$~~

Considero un fluido a riposo in presenza di gravità g e voglio sapere come varia la pressione con la profondità.

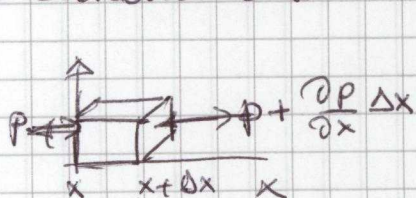
Se abbiamo p_0 alla superficie $\perp$ all'elemento, allora la pressione a $+h$ è ~~p~~ $p - \rho g h$

g = forza gravitazionale per unità di massa.



$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g h = \text{costante}} \quad \text{IDROSTATICA}$$

Consideriamo un ~~elemento~~ ^{volumetto} di liquido di dimensioni $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e calcoliamo le forze nette dovute alla pressione:



$$\begin{aligned} \text{lungo } x: \\ p \Delta y \Delta z - \left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x \right] \Delta y \Delta z = \\ = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Generalizziamo adesso de FORZA PER UNITA' DI VOLUME

$$-\nabla p$$

Supponiamo de $\vec{f}_{ext} = -\rho \nabla \phi \leftarrow$ pot gravitazionale

$\Rightarrow$ CONDIZIONE DI EQUILIBRIO $\boxed{-\nabla p - \rho \nabla \phi = 0}$

Questa condizione esprime non ha in generale soluzione se $\rho \neq \text{cost}$ perché abbiamo un gradiente = qualcosa che non è un gradiente. In questo caso non si può avere equilibrio statico e si stabiliranno dei flussi nel sistema.

Se però $\rho = \text{cost}$ (FLUIDO INCOMPRESSIBILE) $\Rightarrow$

$\boxed{\rho + \rho \phi = \text{costante}}$ EQUILIBRIO STATICO

FORZE DI VOLUME E DI SUPERFICIE: TENSORE DEGLI SFORZI

35

~~Forze di volume e di superficie~~

(FEYNMAN CAP 31)

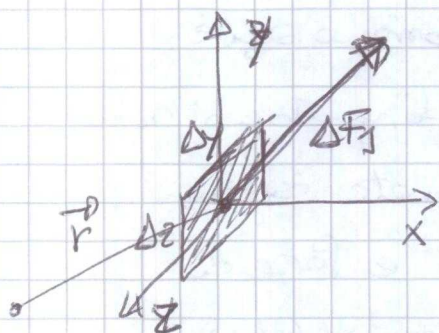
In generale ~~forze~~ su un elemento di fluido possono agire forze di volume, come la gravità, o forze che dipendono solo della posizione nello spazio e sono determinate da un campo esterno (o interno ma a lungo range) e forze di superficie che sono determinate dagli elementi di fluido immediatamente a contatto con l'elemento in considerazione. La pressione è appunto una forza di superficie e deriva dall'azione degli elementi vicini.

Una differenza tra questi due tipi di forze è il loro range di azione: le forze di volume sono a lungo range (macroscopico) le forze di superficie sono a corto range, ossia sono il risultato di interazioni attraverso la superficie dell'elemento di fluido.

Nell'equilibrio idrostatico, la forza di gravità è di volume mentre la pressione è una forza di superficie che agisce attraverso una qualsiasi superficie interna al fluido. Abbiamo poi visto che all'equilibrio, la pressione è sempre ortogonale al piano considerato. Per situazioni di non equilibrio in cui ad esempio il fluido si muove, oppure in sistemi solidi che ~~forze~~ sono in grado di sostenere sforzi di taglio, saranno presenti forze di superficie diverse dalle pressioni che appunto indurranno il moto del fluido o deformeranno il solido.

Consideriamo un corpo di materiale elastico.

immaginiamo un piano immaginario interno al materiale e di questo piano consideriamo un elemento di superficie interno al punto $\vec{r}$ di dimensioni $\Delta y \Delta z$.



Vogliamo sapere la forza attraverso questo elemento di superficie esercitata dal materiale a sinistra ($x < 0$) sul materiale a destra ($x > 0$).

Chiamiamo questa forza $\vec{\Delta F_1}$ indicata

dal vettore in figura.

Se il materiale non è isotropo (oppure non è all'equilibrio) la forza $\vec{\Delta F_1}$ non sarà necessariamente $\perp$ all'elemento di superficie.

Rappresentiamo il vettore con le sue componenti $\Delta F_{1x}, \Delta F_{1y}, \Delta F_{1z}$.

Se $\Delta y \Delta z$ sono piccoli ci aspettiamo (ipotesi di continuità) che il modulo di ΔF_1 sia proporzionale alla superficie $\Delta y \Delta z$, e con le sue due altre per le regole componenti.

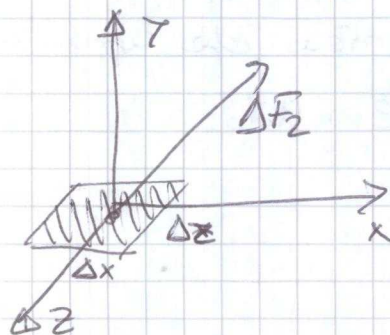
Esprimiamo questo fatto con:

$$\begin{cases} \Delta F_{1x} = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z \\ \Delta F_{1y} = \sigma_{yx} \Delta y \Delta z \\ \Delta F_{1z} = \sigma_{zx} \Delta y \Delta z \end{cases}$$

il secondo indice indica la normale all'elemento di superficie.

Quindi σ_{xx} è una densità superficiale di forza come una pressione.

Potremo poi ad un elemento di superficie perpendicolare all'asse y



$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta F_{2x} = \sigma_{xy} \Delta x \Delta z \\ \Delta F_{2y} = \sigma_{yy} \Delta x \Delta z \\ \Delta F_{2z} = \sigma_{zy} \Delta x \Delta z \end{cases}$$

Invece per un elemento di superficie $\perp$ a $\hat{z}$ si ha:

$$\begin{cases} \Delta F_{3x} = \sigma_{xz} \Delta x \Delta y \\ \Delta F_{3y} = \sigma_{yz} \Delta x \Delta y \\ \Delta F_{3z} = \sigma_{zz} \Delta x \Delta y \end{cases}$$

~~Quasi per un elemento~~

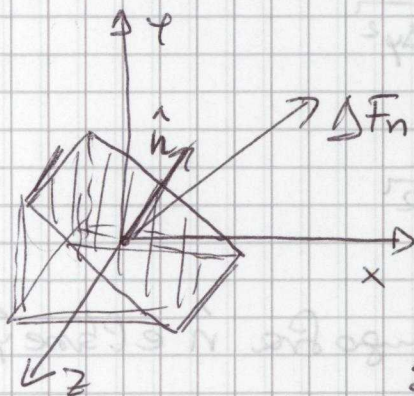
In questo modo abbiamo definito un tensore di rango 2 $\underline{\underline{\sigma}}$ che rappresentiamo con una matrice:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

I cui elementi sono forze per unità di superficie ~~come ab~~

Mostriamo che la conoscenza di $\underline{\underline{\sigma}}$ è sufficiente per descrivere completamente lo stato di stress interno del sistema e che $\underline{\underline{\sigma}}$ è in effetti un tensore.

Sappiamo di voler conoscere lo stress attraverso una superficie orientata in maniera arbitraria, e mostriamo che possiamo ottenere questa informazione da $\underline{\underline{\sigma}}$.



Immaginiamo di isolare un piccolo pezzo della ~~base~~ una parte della superficie ~~da~~ assegnata e le altre facce perpendicolari agli assi.

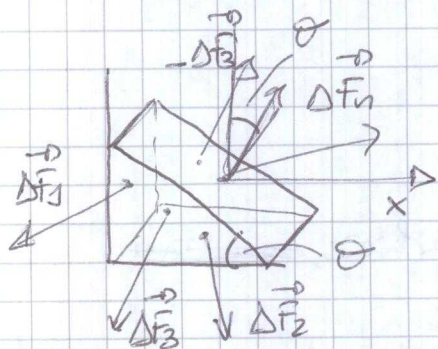
Se il volume è infinitesimo, come nel limite $n \rightarrow \infty$, le forze ~~totali~~ di stress devono essere

in equilibrio e quindi la forza totale si deve annullare.

Questo ci dice che ~~la forza~~ lo stress attraverso la superficie N si deve poter esprimere per mezzo degli stress calcolati prima come attraverso $\underline{\underline{\sigma}}$

La somma (poteri) delle forze di superficie si annullano
trascurare gli effetti ~~delle forze di volume~~ di eventuali
forze di volume (gravità, campi elettrico magnetico o
forze con mazzette). Queste forze sono tutte proporzionali
al volume $\Delta V \sim \Delta x \Delta y \Delta z$ mentre le forze di superficie sono $\sim \Delta x \Delta y$
Nel limite $\Delta z \rightarrow 0$ le forze di volume sono sempre trascurabili.

Calcoliamo le forze lungo $\hat{x}$: 5 componenti una per ogni faccia



Tuttavia se $\Delta z \rightarrow 0$ le forze ~~sta alla~~ due
superfici triangolari saranno uguali e
cancelliche e quindi non metterle.

$$\Rightarrow \Delta F_{1x} = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_{2x} = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z$$

equilibrio: $\Delta F_{3x} = \Delta F_{4x} + \Delta F_{5x} = \sigma_{xy} \Delta y \Delta z + \sigma_{xy} \Delta x \Delta z$

La componente x dello shear attraverso la superficie $\hat{n}$ è anche
definita come:

$$\Delta F_{3x} = \sigma_{xn} \Delta z \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xn} = \frac{\sigma_{xx} \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \sigma_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

ma $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \cos \theta$ θ è l'angolo fra $\hat{n}$ e l'asse $\hat{y}$
ovvero $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \hat{n} \cdot \hat{y} = n_y$

allo stesso modo $\Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sin \theta = \hat{n} \cdot \hat{x} = n_x$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y}$$

In generale:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

o

$$\sigma_{cn} = \sum_j \sigma_{cj} n_j$$

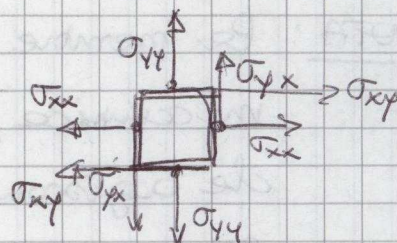
Quindi possiamo calcolare la forza attraverso una qualunque
elemento di
superficie orientata $\hat{n}$ conoscendo $\underline{\sigma}$ semplicemente dalle
relazioni:

$$\vec{F}_n = \underline{\sigma} \cdot \hat{n}$$

↑
Forza per unità
di sup. $\hat{n}$.

$\underline{\sigma}$ È SIMMETRICO:

Consideriamo un cubettino di materiale con le facce orientate
come gli assi. Se il cubo è piccolo possiamo
le forze sulle facce opposte ritagliare le stesse.



Se vogliamo che la tensione totale sia
nulle (equilibrio) dobbiamo richiedere che

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ Se ciò non accadesse il cubettino ruoterebbe.

$$\Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$$

Da questa proprietà di simmetria possiamo dedurre che $\underline{\sigma}$ è
sempre diagonalizzabile, ossia esiste un sistema di assi
principali ortogonali nel quale il tensore $\underline{\sigma}$ è diagonale.

In un fluido all'equilibrio il tensore è sempre diagonale e le
tre componenti diagonali sono proprio la pressione idrostatica

$$\underline{\sigma} = p \delta_{ij}$$

In generale, poiché la densità è invariante per rotazione, definiamo pressione IDROSTATICA:

$$p = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

e definiamo $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \delta_{ij}$ ~~il tensore degli sforzi~~ $\textcircled{*}$

$\underline{\underline{\sigma}}^*$ è il tensore degli sforzi viscosi perché come vedremo è legato in un fluido alla viscosità del fluido.

Per un fluido all'equilibrio o in moto uniforme, $\underline{\underline{\sigma}}^* = 0$

Il segno di p in $\textcircled{*}$ dipende dal fatto che generalmente il fluido è sotto pressione.

NOTA: La pressione p in $\textcircled{*}$ deve essere intesa come pressione meccanica, definita in termini degli sforzi meccanici che agiscono sull'elemento di fluido. In generale non è possibile definire la pressione da considerazioni termodinamiche poiché il sistema è fuori equilibrio.

NOTA: Il tensore degli sforzi dipende dalle proprietà nello spazio (ed eventualmente dal tempo) ed è quindi un campo tensoriale $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}, t)$

RIFERIMENTO EULERIANO E LAGRANGIANO

Consideriamo un mezzo continuo che si muove con velocità $\vec{v}(\bar{x}, t)$ al tempo t nella posizione $\bar{x}$, misurata rispetto ad un riferimento fisso con origine $O\bar{x}$. Introduciamo un secondo riferimento Oz centrato in $O\bar{z}$ e che si muove con il fluido. Assumiamo che a $t=0$ $O\bar{z} = O\bar{x}$ e consideriamo una particella di fluido a $\bar{x}(0) = \bar{z}$.

Al tempo t la particella ha posizione $x(t)$ in $O\bar{x}$ e nuove forme a z in Oz

$$x(t) = x(t, \bar{x}(0)) = x(t, z)$$

Legge le coordinate delle p. lle di fluido nei due riferimenti

Introduciamo ora un campo $\mathcal{D}(x, t)$ (prob, densità di volume di impulso, energia etc)

$$\begin{array}{ccc} \text{A } t=0 & \text{in } O\bar{x} & \mathcal{D}(x(0), 0) \\ & O\bar{z} & \mathcal{D}'(z, 0) \end{array} \Rightarrow \mathcal{D}(x(0), 0) = \mathcal{D}'(z, 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{a } t>0 & \text{in } O\bar{x} & \mathcal{D}(x(z, t), t) \\ & O\bar{z} & \mathcal{D}'(z, t) \end{array} \Rightarrow \mathcal{D}(x(z, t), t) = \mathcal{D}'(z, t)$$

Calcoliamo ora la derivata totale di $\mathcal{D}$ ossia la variazione totale nel tempo.

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial t} \right)_{\bar{z}} = \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \right)_{\bar{x}} + \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \bar{x}} \right)_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{z}} \right)_z$$

$$\text{ma } \vec{v}(\bar{x}, t) \equiv \frac{d\bar{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \right)_z$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} \right)_z = \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} \right)_{\bar{x}} + \vec{V} \cdot \nabla_{\bar{x}} \mathcal{Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla_{\bar{x}}}$$

DERIVATA SOSTANZIALE
O CONVETTIVA

↑
tasso totale
di cambiamento
nelle vicinanze di una
ptte di fluido

- $O_{\bar{x}}$ fisso RIFERIMENTO EULERIANO
- $O_{\bar{z}}$ mobile RIFERIMENTO LAGRANGIANO

Consideriamo ora un ~~volume~~ elemento di volume dV_0 a $t=0$
Vogliamo seguire l'evoluzione di questo volume nel tempo. Poiché
 $\bar{x}(0) = \bar{z}$ possiamo scrivere:

$$dV_t = J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} dV_0$$

cas: $dV_0 = dz = d\bar{x}(0)$

$$dV_t = d\bar{x}(t)$$

$$J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{JACOBIANO} \\ \text{DELLA TRASF.} \end{matrix}$$

La variazione dello Jacobiano col tempo vista in $O_{\bar{z}}$ è

$\frac{dJ}{dt}$. Notando che: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial z_i} \right) = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{dx_j}{dt} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial z_i}$

otteniamo;

$$\frac{dJ}{dt} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial z_1} & \frac{\partial v_1}{\partial z_2} & \frac{\partial v_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial z_1} & \frac{\partial v_2}{\partial z_2} & \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial z_1} & \frac{\partial v_2}{\partial z_2} & \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial z_1} & \frac{\partial v_3}{\partial z_2} & \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \end{vmatrix}$$

$$= J \begin{pmatrix} v_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} x_1 & v_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

ma formula su

$$\text{ma } \frac{\partial v_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z_j}$$

$$\Rightarrow J \begin{pmatrix} v_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad \text{e così per le altre componenti}$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dt} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) J = J \nabla_x \cdot \underline{v}$$

$$\boxed{\frac{dJ}{dt} = J \nabla_x \cdot \underline{v}}$$

EVOLUZIONE DEI VOLUMI

$$\text{se } \nabla_x \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{dJ}{dt} = 0 \quad \left(\text{Th di Liouville.} \right)$$

(per sistemi hamiltoniani)

EQVAZIONE GENERALE DI BILANCIO

Vogliamo ricavare l'espressione del moto della generica densità $\rho(x, t)$. Consideriamo un volume V_0 a $t=0$ contenente una certa quantità di fluido. Al tempo t lo stesso set di particelle di fluido occuperanno un volume V_t .

La quantità $\rho(t)$ corrispondente alla densità ρ in V_t al tempo t è:

$$D(t) = \int_{V_t} D(x, t) dV_t$$

Il tasso di cambiamento di questa quantità nel tempo visto da un osservatore in moto con il fluido è:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{V_t} D(x, t) dV_t \right]$$

possiamo riscrivere l'integrale in termini del volume a $t=0$ e questo ci permette di portare la derivata dentro il segno di integrale.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D(t) &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} dV_0 J_t D(x, t) = \int_{V_0} dV_0 \left[\frac{d}{dt} D(x, t) J_t + D \frac{dJ}{dt} \right] = \\ &= \int_{V_0} dV_0 \left(\frac{dD}{dt} + D \bar{\nabla}_x \cdot \bar{v} \right) J_t = \int_{V_t} dV_t \left(\frac{dD}{dt} + D \bar{\nabla} \cdot \bar{v} \right) \end{aligned}$$

Il cambiamento di $D(t)$ deve essere bilanciato da un eventuale flusso di D attraverso la superficie di V_t e da un eventuale termine di sorgente di D interno a V_t .
Avremo:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \int_{V_t} dV_t \left[\frac{dD}{dt} + D \bar{\nabla} \cdot \bar{v} \right] = \int_{V_t} \sigma_D dV_t - \int_{S_t} \vec{J}_D \cdot d\vec{S}_t$$

$$\begin{cases} \sigma_D = \text{sorgente} \\ \vec{J}_D = \text{flusso di } D \end{cases}$$

Applicando Per GAUSS: $\int_{S_t} \vec{J}_D \cdot d\vec{S}_c = \int_{V_t} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}_D dV_t$ (40)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dt} = - \oint \vec{v} \cdot \vec{v} + \sigma_D - \vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}_D} \quad (1)$$

usando la definizione di derivata materiale si ottiene:

$$\boxed{\frac{DD}{Dt} = - \nabla_x \cdot [D\vec{v} + \vec{J}_D] + \sigma_D} \quad (2)$$

$D\vec{v}$ = CORRENTE CONVETTIVA DI D.

È presente non appena il fluido è in moto.

(1) tasso di cambiamento nel tempo delle densità nelle vicinanze di un punto in un riferimento in moto con la massa di fluido (LAGRANGE).

(2) tasso di cambiamento nel tempo delle densità in un punto fisso nello spazio (EULERO)

(BERNARDI-PECORA) ↓

Consideriamo un volume fissato nello spazio V_f e integriamo la (2) su quel volume:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f} dV_f D = - \int_{S_f} (D\vec{v} + \vec{J}_D) \cdot d\vec{S}_f + \int_{V_f} \sigma_D dV_f$$

↑
tasso di cambiamento di D nel tempo in un riferimento fisso

↑
flusso attraverso la superficie di S_f

↑
prodotto di D dentro V_f

CONSERVAZIONE DELLA MASSA: EQ DI CONTINUITA'

41c

Consideriamo un volume V_t che si muove con il fluido
e consideriamo la massa $M(t)$ di fluido contenuta nel volume.
Per la conservazione della massa, in assenza di reazioni, si ha

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(r, t) dV_t = \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV_t = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

giunge

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot \mathbf{J}_\rho = 0 \\ \mathbf{J}_\rho = \rho \mathbf{v} \end{cases}$$

FLUIDO INCOMPRESSIBILE: $\rho = \text{costante} \Rightarrow \rho_t = 0$

$$\begin{cases} \rho_t = 0 \\ \nabla \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0}$$

Se $D(t) = \int_V dV \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ è una quantità conservata,

(4)

come la massa totale, ~~l'energia~~ l'impulso totale o l'energia totale, non ci sarà creazione o distruzione di $\mathcal{D}$ dentro V
 $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J}_D = 0$ e l'equazione di ~~conservazione~~ si riduce

a:

$$\boxed{\partial_t \mathcal{D} + \nabla \cdot [\mathcal{D} \mathbf{v} + \mathbf{J}_D] = 0} \quad (3)$$

Quindi $\mathcal{D}(t) = \text{cost} \Leftrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ è soluzione di (3) localmente

Consideriamo un sistema ~~in~~ all'equilibrio termodinamico che subisce una piccola perturbazione:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D}_0 + \delta \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{\mathbf{J}}_D(\mathbf{r}, t) = [\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_D(\mathbf{r}, t)] = \delta \tilde{\mathbf{J}}_D(\mathbf{r}, t) & (\tilde{\mathbf{J}}_{eq} = 0) \\ \sigma_D(\mathbf{r}, t) = \delta \sigma_D(\mathbf{r}, t) & (\sigma_{eq} = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3) \Rightarrow \partial_t \delta \mathcal{D} + \nabla \cdot \delta \tilde{\mathbf{J}}_D(\mathbf{r}, t) = \delta \sigma_D(\mathbf{r}, t)$$

per risolvere questo tipo di equazioni posso farne alla rappresentazione di Fourier:

$$\begin{cases} f_{\vec{k}} = \int d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}) \\ f(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f_{\vec{k}} \end{cases}$$

In rappresentazione di Fourier ottengo:

$$\partial_t \delta \mathcal{D}_{\vec{k}}(t) + i\vec{k} \cdot \delta \tilde{\mathbf{J}}_{\vec{k}}(t) = \delta \sigma_{\vec{k}}(t)$$

Se $\mathcal{D}$ corrisponde ad una proprietà conservata $\delta \sigma = 0$

$$\Rightarrow \partial_t \delta \mathcal{D}_{\vec{k}}(t) + i\vec{k} \cdot \delta \tilde{\mathbf{J}}_{\vec{k}}(t) = 0$$

quindi ~~è~~ quando $|k| \rightarrow \infty$, il tasso di cambiamento di $\delta \hat{D}_k(t)$ tende ad annullarsi,

Questo significa che fluttuazioni nelle densità di quantità conservate diventano estremamente (long-lived) ossia che il loro tempo di decadimento $\tau(k) \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$.

Questo tipo di modi verranno detti MODI IDRODINAMICI

Potremo avere MODI IDRODINAMICI di diversa natura: ($k \rightarrow \infty$)

A) se non ci sono frequenze di propagazione $\omega(k)$ il modo è detto DIFFUSIVO

B) altrimenti il modo è PROPAGANTE

Se la quantità non è conservata $\delta \hat{T}_k \neq 0$ e quindi

$\partial_t \delta \hat{D}_k(t) \neq \delta \hat{T}_k \Rightarrow$ il modo ha un tempo di vite finito anche nel limite $k \rightarrow \infty$ (a meno che $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta T_k = 0$).

ESQUAZIONE DI BILANCIO PER L'IMPULSO

42

L'equazione di bilancio per l'impulso di un elemento di fluido ~~che~~ dentro delle eq. del noto Navier-Stokes:

Se $P(t)$ è l'impulso in un certo volume V_t

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \vec{J}_p = \int_{V_t} dV_t \rho \vec{F}_{ext} + \int_{S_t} \vec{f}_n dS_t$$

$\vec{F}_{ext}$ = forza esterna (eventuale) per unità di volume

$\vec{f}$ = forza per unità di superficie che agisce al boundary del fluido

$$\vec{f}_n = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n}$$

e con GAUSS $\Rightarrow \int_{S_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n} dS_t = \int_{V_t} dV_t \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

Applicando la generale legge di bilancio si ottiene:

$$\frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v}(\nabla \cdot \vec{v}) = \rho \vec{F}_{ext} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

J = corrente di impulso $\Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{J}(\nabla \cdot \vec{v}) = \rho \vec{F}_{ext} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{J} \vec{v} + \underline{\underline{\sigma}}] = \rho \vec{F}_{ext}}$$

ESNAZIONE DI BILANCIO PER L'ENERGIA

(426)

Se $E(t)$ è l'energia associata al fluido in V_t al t .

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} e(r, t) \, dV$$

↑
densità di energia

L'energia può cambiare perché:

- a) trasportata dalle moto attraverso la superficie = corrente convettiva
- b) l'esterno compie lavoro meccanico al sistema
- c) il calore viene scambiato con l'esterno

b) la forza su dS è $d\vec{F} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S}$, il lavoro per unità di tempo su $d\vec{S}$ per unità di tempo è:

$$\vec{v} \cdot d\vec{F} = \vec{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \text{Lavoro totale} = \int_{S_t} \vec{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S}$$

c) Se $\vec{J}_q$ è il flusso di calore $\Rightarrow -\vec{J}_q \cdot d\vec{S}$ è la quantità di calore che entra attraverso $d\vec{S}$ nell'unità di tempo

$$\Rightarrow \text{Calore totale} = - \int_{S_t} \vec{J}_q \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_t} e \, dV = \int_{S_t} (\vec{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \vec{J}_q) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \frac{de}{dt} + e \nabla \cdot \underline{\underline{v}} = \nabla \cdot (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \vec{J}_q)$$

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \vec{J}_q - e \underline{\underline{u}})}$$

IPOTESI 1: FLUIDO INCOMPRESSIBILE $\rho = \text{cost}$ $\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = 0$

che significa?:

- 1) variazioni di pressione sono così piccole che la densità del fluido è essenzialmente costante. Vedremo che per queste ipotesi la velocità del suono risulta infinita, e quindi questa modello è ragionevolmente accurato solo se la velocità del fluido (valore caratteristico) è molto inferiore alla velocità del suono nel mezzo. $v \ll c$

Dall'eq. di continuità $\Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$

$$M = \frac{v}{c} = \frac{\text{NUMERO}}{\text{MACH}}$$

IPOTESI 2: FLUIDO IDEALE con $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$

Trascuriamo gli effetti di attrito (viscosità) tra particelle di fluido adiacenti (vedremo che questo ~~risultato~~ ~~mecc~~ è equivalente a considerare la viscosità nulla o che la dissipazione di energia nulla in zero nel fluido).

J Von Neumann: DRY WATER

$\Rightarrow$ Eq del moto: $\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} = -\underline{\nabla} p - \rho \underline{\nabla} \phi$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{for} \\ \text{ext} \end{array} \right. = -\underline{\nabla} \phi$

ora si può facilmente vedere che: $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{v} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v})$

per l'incompressibilità $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ si riduce a

$$\partial_t \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi$$

IDENTITÀ VETTORIALE: $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = (\nabla \times \underline{v}) \times \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla (\underline{v} \cdot \underline{v})$

Definiamo ~~circulazione~~ IL ROTORE DI $\underline{v}$ = VORTICITÀ

$$\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t \underline{v} = \underline{\Omega} \times \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla (v^2) = - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi} \quad (*)$$

— FLUSSO A VORTICITÀ NULLA OVUNQUE = IRROTAZIONALE

$$\underline{\Omega} = 0$$

Circolazione di un vettore su un percorso (curve chiuse) è

$$C = \oint \underline{v} \cdot d\underline{e} = \int_{\text{area}} (\nabla \times \underline{v}) \cdot d\underline{s}$$

↑
STOKES

$\Rightarrow$ VORTICITÀ È LA CIRCOLAZIONE DI $\underline{v}$ ~~sempre~~ INTORNO AD UN'AREA UNITARIA (PERPENDICOLARE A $\underline{\Omega}$).

SE VOGLIAMO RISOLVERE $(*)$ PER CONOSCERE LA VELOCITÀ
POSSIAMO APPLICARE IL ROTORE AD ENTRAMBI I MEMBRI
PER ELIMINARE I GRADIENTI

SI OTTIENE:

44

$$\begin{cases} \partial_t \Omega + \nabla \times (\Omega \times \underline{v}) = 0 \\ \nabla \times \underline{v} = \Omega \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0 \end{cases}$$

DETERMINAMO

COMPLETAMENTE $\underline{v}$

ANALOGIA: in elettrodinamica abbiamo le stesse equazioni

per il campo magnetico $\underline{B}$:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{B} = \underline{j} / c^2 \epsilon_0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{cases}$$

FLUSSO IRROTAZIONALE: $\Omega = 0 \quad \forall t, \forall r$

$$\Rightarrow \partial_t \Omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ \nabla \times \underline{v} = 0 \end{cases}$$

(Equazioni dell'elettrostatica nel vuoto)

FLUSSO STAZIONARIO - BERNOULLI

Torniamo all'equazione del moto $\textcircled{4}$ ma consideriamo situazioni di moto stazionario.

STAZIONARIO $\equiv$ il moto non cambia, $\underline{v}$ non dipende esplicitamente dal tempo

$$\partial_t \underline{v} = 0 \quad \underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$$

$$(\Omega \times \underline{v}) + \frac{1}{2} \nabla(v^2) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi$$

moltiplicando per $\underline{v}$ a sinistra in entrambi i membri si ottiene:

$$\boxed{\underline{v} \cdot \nabla \left[\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right] = 0} \quad \textcircled{44}$$

Questa equazione ci dice che per un piccolo spostamento nella direzione della velocità del fluido, il termine tra parentesi non cambia.

Come per i campi elettromagnetici, nel caso di flussi stazionari, possiamo considerare le linee di flusso (STREAMLINES) che sono le linee localmente tangenti al campo di velocità. Nei flussi stazionari le particelle di fluido si muovono lungo queste linee.

L'eq. che abbiamo ottenuto $(\oplus)$, ci dice che lungo le linee di flusso:

$$\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right] = \text{costante} \quad (\text{lungo le linee di flusso})$$

TEOREMA DI BERNOULLI

In generale la costante può essere diversa nelle diverse linee di flusso. Il th di Bernoulli dice soltanto che questa ~~costante~~ quantità rimane costante lungo ogni linea di flusso.

Se però il flusso è IRROTAZIONALE ($\Omega = 0$) e STAZIONARIO ($\partial_t v = 0$) l'eq. del moto si riduce a:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{costante} \quad (\text{ovunque})}$$

Esprime la conservazione dell'energia

~~l'Eq di Bernoulli non esprime altro che la conservazione dell'energia~~

LINEE DI FLUSSO, TUBI DI FLUSSO,

- LINEE DI FLUSSO: tangenti ad ogni punto $\vec{r}$ del vettore velocità $\vec{v}(\vec{r}, t)$ al tempo t_0 .
- TUBO DI FLUSSO: insieme di linee di flusso che hanno all'estremo una curva chiusa nello spazio.

Matematicamente le linee di flusso sono definite come il set di punti $M(x, y, z)$ tali che lo spostamento lungo le linee sia collineare con le vettore velocità. Questa condizione si esprime

come:

$$d\vec{M} \times \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$



DEFINIZIONE CINEMATICA DEI FLUIDI (FLUSSI?)

(Pt cap. 3)

Qui analizzeremo il concetto di deformazione di una pila di fluidi necessario per per definire e sp.

costitutiva de legge lo shear tensor con il campo di velocità.

COMPONENTI LOCALI DEL CAMPO GRADIENTE DI VELOCITÀ

Consideriamo due punti di fluido a $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$ e vogliamo vedere come la velocità del punto è legata a quella del punto.

Al primo ordine nelle variabili si ha:

$$dv_\alpha = \sum_k \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} dx_k$$

Nota: discutendo solo le differenze di velocità le componenti comuni delle velocità non entrano in gioco in effetti la deformazione ~~non~~ è locale non dipende dalla

velocità del moto d'insieme.

(45b)

la grandezza tensoriale i cui elementi sono $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ è detta

tenore GRADIENTE DI VELOCITÀ ed è un campo tensoriale:

$$(\underline{G})_{ij} = (\nabla \cdot \underline{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

~~Proprietà~~ Come tutti i tensori di rango 2 può essere decomposto come somma di un tensore parte simmetrica $\underline{e}$ e una parte antisimmetrica $\underline{\omega}$

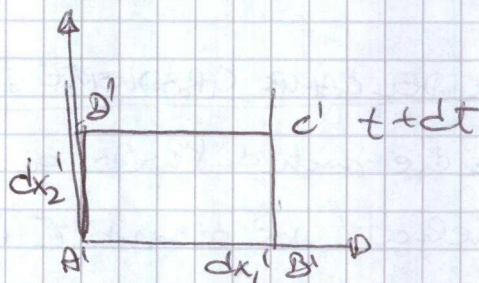
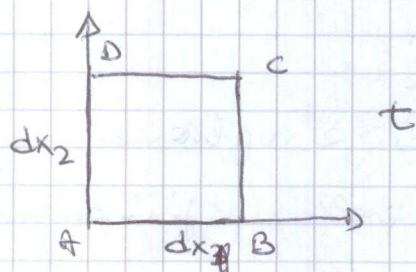
$$\underline{G} = \underline{e} + \underline{\omega}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e} = \frac{1}{2} [\underline{G} + \underline{G}^T] \\ \underline{\omega} = \frac{1}{2} [\underline{G} - \underline{G}^T] \end{array} \right.$$

COMPONENTE SIMMETTRICA: DEFORMAZIONE PURA

-COMPONENTI DIAGONALI: $e_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_{ii}$

consideriamo un elemento di fluido rettangolare di spigoli dx_1, dx_2, dx_3 e consideriamo lo stesso elemento a un tempo dt successivo.



$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1' = dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dt \\ dx_2' = dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 dt \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta(dx_1)}{dx_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dt = e_{11} dt \\ \frac{\Delta(dx_2)}{dx_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dt = e_{22} dt \end{array} \right.$$

Analogamente nelle tre direzioni

$$\frac{\Delta(dx_3)}{dx_3} = e_{33} dt$$

$\Rightarrow$ I TERMINI DIAGONALI DI $\underline{G}$ SONO IL TASSO DI DEFORMAZIONE
DELL'ELEMENTO DI FLUIDO NELL'UNITA' DI TEMPO

Il relativo cambiamento di volume ϵ : $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(dx_1 dx_2 dx_3)}{dx_1 dx_2 dx_3} =$

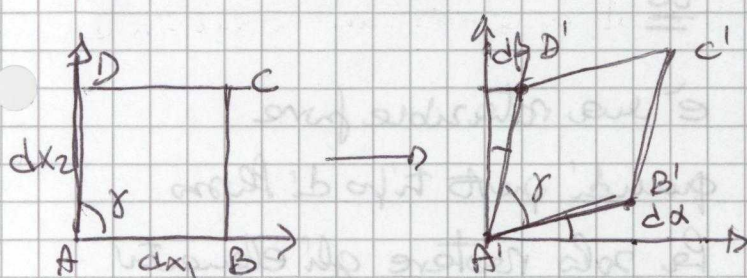
$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dt = (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) dt = \text{Tr}(\underline{G}) dt$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr}(\underline{G}) dt}$$

la traccia di $\underline{G}$ ϵ il tasso di
cambiamento di volume nell'unita'
di tempo.

FLUIDO INCOMPRESSIBILE : $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{G}$ ha traccia nulla !!

- COMPONENTI NON-DIAGONALI : $e_{ij} = e_{ji}$ simmetrico.



$$\begin{aligned} A(0,0) &\rightarrow A'(0,0) \\ B(dx_1, 0) &\rightarrow B'(dx_1, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 dt) \\ D(0, dx_2) &\rightarrow D'(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 dt, dx_2) \\ C(dx_1, dx_2) &\rightarrow C'(dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 dt, dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 dt + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 dt) \end{aligned}$$

Quindi i vettori vengono trasformati nel seguente modo:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \underline{G} \cdot d\vec{r} dt \quad (\text{al primo ordine nelle variazioni}).$$

Nel caso di solo componenti non diagonali

$$\begin{cases} dx \approx \tan(\alpha) \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dt \\ dy \approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(dx - dy)}{dt} = -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2e_{12}$$

IL TERMINE OFF-DIAGONALE RAPPRESENTA
~~LA DEFORMAZIONE~~ VELOCITA' DI DEFORMAZIONE
 ANGOLARE LOCALE

Da queste analisi possiamo separare la parte ~~diagonale~~
 simmetrica di $\underline{\underline{G}}$ in una parte solo diagonale e una
 a traccia nulla:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} + \left[\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} \right] = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}}$$

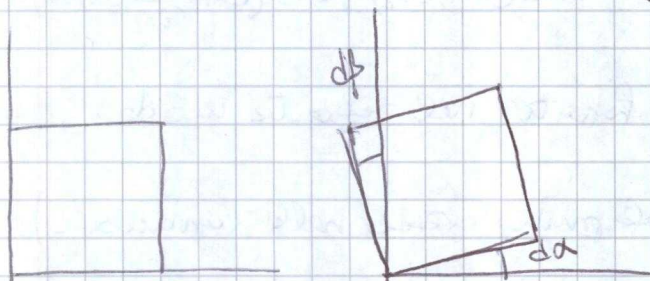
$\underline{\underline{t}}$ = dilatazione di volume
 $\underline{\underline{d}}$ = shear deviatorico (deviatoric stress).

$\underline{\underline{t}}$ = deformazioni ~~senza~~ con cambiamento di volume senza
 cambiamento di forma
 $\underline{\underline{d}}$ = deformazioni ~~con~~ ^{con} cambiamento di forma ma non di
 volume

COMPONENTE ANTISIMMETRICA: $\underline{\underline{\omega}}$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

è una rotazione pura
 quindi questo tipo di flusso
 fa solo ruotare gli elementi
 di fluido senza deformarli



$$\begin{cases} dx \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} d\tau \\ d\theta \approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} d\tau = -d\alpha \end{cases}$$

$$\omega_{12} \propto \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Rightarrow \underline{\underline{d}} = 0$$

$$\left(\underline{\underline{\omega}} \right)_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$dx = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \omega_{12} dt$$

ω_{ij} = velocità ~~locale~~ angolare di rotazione locale

Un tensore antisimmetrico si può anche esprimere con un vettore omale:

$$\Omega_k = -\varepsilon_{ijk} \omega_{ij}$$

$$\boxed{\underline{\Omega} = \underline{\nabla} \times \underline{v}} \quad \text{VORTICITÀ}$$

Se $\underline{\omega}$ è il vettore velocità angolare locale del fluido in $\underline{r}$ allora si ha $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\Omega}$

Consideriamo un fluido con $\underline{\omega}$ e quindi $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{v} = \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \right) \hat{z} = 2\omega \hat{z} \quad \text{e } \hat{z} \text{ è l'asse di } \underline{\omega} \text{ e per cui } \underline{\omega} \text{ è parallelo all'asse } \hat{z}.$$

SUMMARY:

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\omega}}$$

ESEMPIO: FLUSSO 2D: $\underline{v}(x,y) = (v_x = ax + 2by, v_y = -ay)$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(\underline{\underline{G}}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

dilatazione deformazione rotazione

Poiché $\text{Tr}(\underline{G}) = 0 \Rightarrow$ FLUSSO INCOMPRESSIBILE

(476)

Il tensore di deformazione può essere diagonalizzato per trovare le direzioni principali di allungamento ed elongazione (nuclei degli autovettori)

eq. caratter.: $(a^2 - \lambda^2 + b^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} \end{pmatrix} \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} \end{pmatrix}$$

⑥ $a \neq 0, b = 0$ pura deformazione: $\underline{d} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $\lambda_{\pm} = \pm a$

~~direzioni~~ V_+ e V_- sono a 90° uno dall'altro, uno nel primo
quadrante, l'altro nel
secondo. Deformazioni esponenziali nel tempo.

⑦ $a = 0, b \neq 0$ FLUSSO ~~DI~~ TAGLIO ^{PLANARE} SEMPLICE (COUETTE FLOW
PLANARE).

è la sovrapposizione di una deformazione e una rotazione pure:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

LA FUNZIONE DI FLUSSO (CORRENTE - STREAM FUNCTION)

Come nelle magnetodinamica introduce il potenziale vettore, possiamo qui introdurre un ulteriore vettore che in situazioni particolari ci aiuta a interpretare le soluzioni dell'equazione del fluido.

Per un flusso incompressibile $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$

dove $\underline{A}$ è il potenziale vettore per la velocità. In generale preferiamo risolvere le equazioni in termini di $\underline{A}$ anziché $\underline{v}$, eccetto nel caso di flussi bidimensionali o a simmetria assiale.

Flusso 2D: Flusso in cui una componente di $\underline{v}$ è identicamente nulla. In questo caso: ($v_z = 0$)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

possiamo definire uno scalare $\psi(x, y)$: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x$

$$\Rightarrow \underline{A} = \psi \hat{z}$$

La funzione SCALARE ψ è detta **STREAM-FUNCTION**.

In coordinate polari:

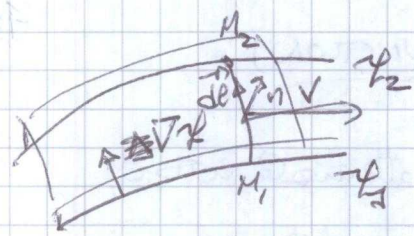
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

PROPRIETÀ DI ψ :

A) Le curve $\psi = \text{cost}$ sono le linee di flusso. Dimostrano che $\underline{v}$ è $\perp$ a $\underline{\nabla} \psi$ e quindi tangente alle linee $\psi = \text{costante}$.

$$\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \psi = v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

B) La differenza $\psi_2 - \psi_1$ rappresenta il tasso di flusso Q di fluido in un tubo di corrente di sezione rettangolare unitata dalle linee ψ_1, ψ_2 e di profondità unitaria lungo $\hat{z}$.



$$Q = \int_1^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) dl$$

ma $dl = (dx, dy, 0) \Rightarrow \hat{n} dl = (dy, -dx, 0)$

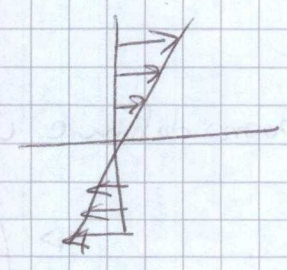
$$\Rightarrow Q = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (-dx) \right] = \int_{M_1}^{M_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Quindi per un fluido incomprimibile il tenore di flusso attraverso il suo contorno è costante.

ESEMPI: $\psi(x,y) = ax^2 + by^2$ a, b reali

$\begin{cases} v_x = 2by \\ v_y = -2ax \end{cases}$

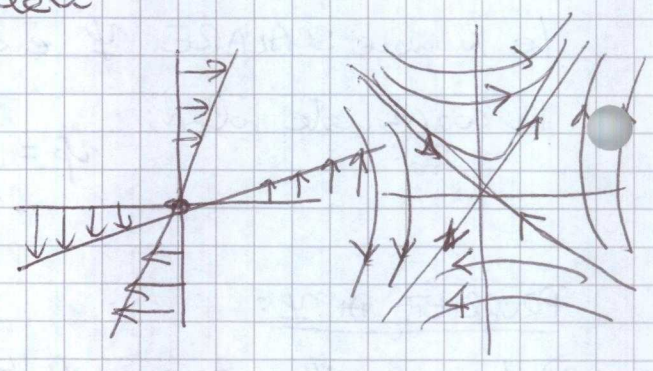
Ⓐ $a/b = 0 \quad \begin{cases} v_x = 2by \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \text{SIMPLE SHEAR}$



LINEE DI FLUSSO: $\psi(x,y) = \text{costante}$
rette orizzontali

Ⓑ $a/b = -1 \quad \psi = a(x^2 - y^2)$

~~stream lines.~~
stream lines.
 $a(x^2 - y^2) = \text{costante}$
iperboli equilateri.
 $y = \pm x$ bisettrici



$$\begin{cases} v_x = 2by \\ v_y = 2bx \end{cases} \Rightarrow \nabla \times \underline{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{z} = 0$$

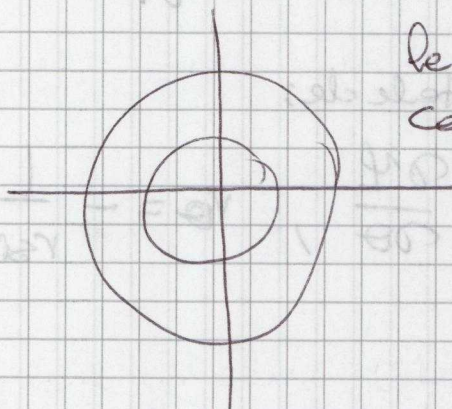
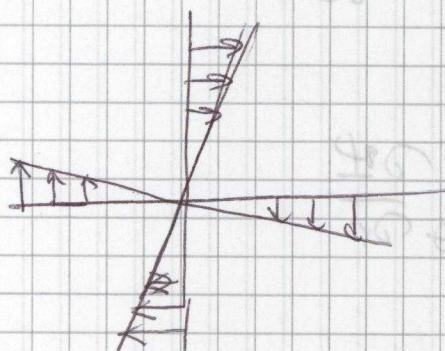
FLUSSO IRROTAZIONALE
DEFORMAZIONE PURA

⑤ $a/b = 1$

$\begin{cases} v_x = 2ay \\ v_y = -2ax \end{cases}$

ROTAZIONE PURA

49



Le linee di flusso sono
cerchi $\psi = 2(x^2 + y^2) = \text{cost.}$

⑥ Caso generale: $a \neq b \neq 0$ possiamo sempre scrivere la stream function come somma di una di shear e una di rotazione:

$$\psi(x, y) = \frac{b+a}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b-a}{2}(y^2 - x^2) = \psi_{\text{rot}} + \psi_{\text{shear}}$$

— FLUSSO ASSIALE: flussi che possiedono un asse di simmetria rispetto al quale il campo di velocità è invariante per rotazione.

In questo caso introduciamo le STREAM FUNCTION DI STOKES.

⑦ In coordinate cilindriche si ha: $\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

come conseguenza delle simmetrie assiali $\underline{v}$ non dipende da ϕ e

quindi $\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

o ψ $\begin{cases} v_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \end{cases}$

⑧ PROBLEMA A SIMMETRIA SPERICA:

$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$

opp. dico
 $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

Per flussi con simmetria assiale rispetto a $\hat{z}$ le componenti di $\underline{v}$ sono indipendenti da $\varphi \Rightarrow \frac{\partial(r^2 \sin\theta v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin\theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0$

addiversa da $\mathcal{I}$ è tale che:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA PER LO STRESS TENSOR

50

Abbiamo già definito il tensore degli sforzi in termini delle forze superficiali sull'elemento di fluido.

Abbiamo anche visto che per una rete e un tensore simmetrico e che la pressione idrostatica è la sua traccia:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p \underline{\underline{I}} \quad p = -\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

Per un fluido in equilibrio abbiamo la sola pressione idrostatica, quindi $\underline{\underline{\sigma}}'$ si genera durante il moto, e in particolare durante il moto relativo di particelle di fluido. $\underline{\underline{\sigma}}'$ è quindi legato alle deformazioni del fluido ed è detto $\underline{\underline{\sigma}}' = \text{TENSORE DEGLI SFORZI VISCOSI}$

Vogliamo ora determinare la relazione tra $\underline{\underline{\sigma}}'$ e deformazione del fluido. Abbiamo visto che il generico campo di velocità $\underline{\underline{G}}$ si separa in:

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\omega}}$$

↑ ↑ ↑
traslazione deformazione rotazione

Poiché le rotazioni non induce deformazioni hanno a che fare con $\underline{\underline{\sigma}}'$ non dipende da $\underline{\underline{\omega}}$, mentre dipende da $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{d}}$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{e}})}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA: per i termini di deformazione non posso elevarti (da specificare) faciamo un sviluppo in serie al 1° ordine.

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = 0 \quad \text{se} \quad \underline{\underline{e}} = 0$$

dove $\underline{\underline{A}}$ è un tensore di rango 4.

In un nuovo coordinate (primi) si può dimostrare che la forma più generale di $\underline{\underline{A}}$ è:

$$A_{ijkl} = \cancel{A_{ijkl}} A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Inoltre poiché $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ $A_{ijkl} = A_{jikl} \Rightarrow A = A'$

e quindi:

$$\sigma'_{ij} = A \left(\sum_k \delta_{ik} \delta_{jl} e_{kk} + \delta_{jk} \delta_{il} e_{kk} \right) + B \delta_{ij} \sum_k \delta_{kl} e_{kk} =$$

$$\sigma'_{ij} = A (e_{ij} + e_{ji}) + B \delta_{ij} \sum_k e_{kk} = 2A e_{ij} + B \delta_{ij} \text{Tr}(\underline{\underline{e}})$$

Questa relazione si può riscrivere usando $\underline{\underline{e}}$ e $\underline{\underline{e}}$:

$$\sigma'_{ij} = \underbrace{\eta \left[2 e_{ij} - \frac{2}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \delta_{ij} \right]}_{\text{deformazione a volume costante}} + \underbrace{\zeta \text{Tr}(\underline{\underline{e}}) \delta_{ij}}_{\text{dilatazione pura}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \text{VISCOSITA' DI TAGLIO (SHEAR)} \\ \zeta = \text{VISCOSITA' DI VOLUME (BULK)} \end{array} \right.$$

sono i cosiddetti ~~coefficienti~~ COEFFICIENTI DI TRASPORTO, propri di materiali, come dipendono dal materiale in esame.

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \eta \left[\nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}} \right] + \zeta (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}}$$

I fluidi per i quali vale questa relazione lineare tra sforzo (shear) e forze (gradiente di velocità) sono detti FLUIDI NEWTONIANI

Sono i fluidi in cui i tempi di rilassamento caratteristici delle strutture microscopiche (catenari) sono molto più rapidi del tempo tipico del gradiente di velocità:

Example: SSF

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\gamma}$ è il tasso d'inverso di un tempo.

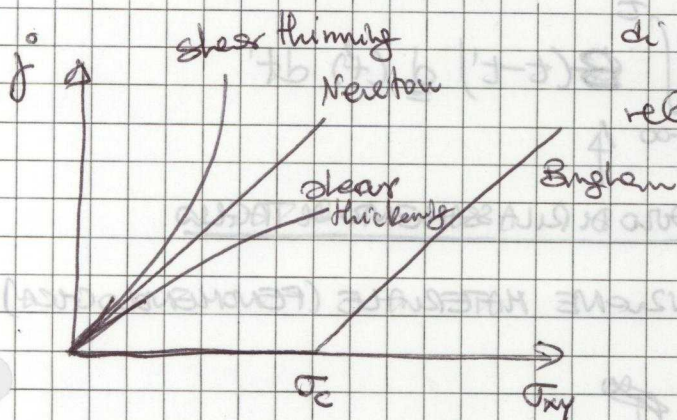
in questo caso ~~relazione~~ la relazione costitutiva per il sistema Newtoniano (legge di Newton) è:

$$\sigma_{xy} = \eta \dot{\gamma}$$

Se chiamo τ il tempo di rilassamento microscopico del sistema, si avrà $\tau \dot{\gamma} < 1$ REGIME NEWTONIANO
 $\tau \dot{\gamma} > 1$ REGIME NON-NEWTONIANO

REOLOGIA: STUDIO DEL COMPORTAMENTO NON-LINEARE DI FLUIDI NON-NEWTONIANI (Sospensioni, emulsioni, soluzioni di polimeri).

FLUIDO DI BINGHAM è un fluido che per fluire ha bisogno di un valore critico dello sforzo, poi la relazione lineare (distribuisce).



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{SHEAR THINNING:} \\ \text{SHEAR THICKENING:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \eta(\dot{\gamma}) < \eta(0) \\ \eta(\dot{\gamma}) > \eta(0) \end{array} \right. \quad (\text{reversibile})$$

VISCOELASTICITÀ:

Più in generale si possono avere fluidi non stazionari
 $(\underline{\sigma})(t) = \underline{G}(t)$ e si vuole sapere la risposta del sistema
 a questi flussi. ~~Le~~ I coefficienti di risposta e le risposte
 lineari o meno di un materiale sono la maniera in cui
 caratterizzano il materiale stesso.

Se la variazione di $\underline{G}(t)$ nel tempo è lenta ($De = \tau/\eta \ll 1$)
 il sistema ha il tempo di adattarsi al flusso e rimane

viscoso: ~~si può dire che il sistema~~

esempio $\underline{\sigma}(t) = \eta \underline{\dot{d}}(t)$

Se la variazione è molto veloce ~~per~~ allora si può avere un
 comportamento più complicato con effetti di memoria.

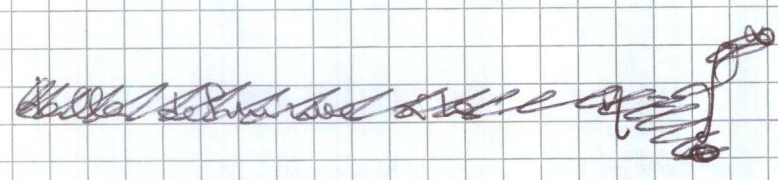
In generale il tensore degli sforzi dipende un funzionale dello
~~stress~~ in tempo di deformazione: $\underline{\sigma} = \mathcal{F}[\underline{d}]$

Se l'intensità del flusso è comunque piccola allora sono in
 regime lineare (nell'intensità) e abbiamo una dipendenza
 funzionale lineare:

$$\underline{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \underset{\uparrow}{B}(t-t') \underline{d}(t') dt'$$

$$B(t-t') = \text{MODULO DI RILASSAMENTO DI TAGLIO}$$

FUNZIONE MATERIALE (FENOMENOLOGICA)



- Caratterizzare il caso in cui

$$\underline{d}(t) \neq \underline{d} \quad t > 0$$

$$\underline{d}(t) = \underline{d} \quad t \leq 0$$

$$\underline{d}(t) = \underline{d} \delta(t)$$

come il caso è costante per $t > 0$.

Dalle definizioni di $B(t)$ e η vediamo che vale la relazione:

$$\eta = \int_0^{\infty} B(t) dt$$

- Flusso oscillante: $\underline{d}(t) = \underline{d}_0 \cos(\omega t) = \underline{d}_0 \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$

~~$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}_0 \operatorname{Re} \left[\int_0^t B(t-t') e^{i\omega t'} dt' \right]$$~~

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}_0 \operatorname{Re} \left[\int_0^t B(t-t') e^{i\omega t'} dt' \right] =$$

$$= \underline{d}_0 \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \int_0^{\infty} B(s) e^{-i\omega s} ds \right]$$

$$\hat{B}(\omega)$$

TRASFORMATA DI
FOURIER-LAPLACE

$$\hat{B}(\omega) = \hat{B}'(\omega) + i \hat{B}''(\omega)$$

↑
MODULO DI
IMMAGAZZINAMENTO

↑
MODULO DI
DISSIPAZIONE

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}_0 \left[\cos(\omega t) \hat{B}'(\omega) - \sin(\omega t) \hat{B}''(\omega) \right]$$

NOTA: I COEFFICIENTI FENOMENOLOGICI η, β sono quantità che possono essere legate a fluttuazioni (o meglio momenti di fluttuazioni) del sistema all'equilibrio (LRT) e quindi sono anch'essi ~~FUNZIONI DI STATO~~ FUNZIONI DI STATO

In regime non lineare non è più vero perché anch'essi possono dipendere dalle stime delle deformazioni.

$$b = 4h$$

Consider 6 cases in all

$$b = 4h$$

$$b = 4h$$

and 6 cases in all

For the definition of $B(t)$ and $b(t)$ we have

$$B(t) = \int_0^t b(s) ds$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t b(s) ds$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t)$$

TRANSFORM IN
TIME

$$\hat{b}(w) = \hat{B}'(w) = i \hat{B}(w)$$

TRANSFORM IN
TIME

$$b(t) = \frac{d}{dt} B(t) \Rightarrow [b(t)] = i [B(t)]$$

THE DIFFERENTIAL EQUATION

is a second order differential equation

of the form

with

and

the initial conditions

Trasformata di Laplace:

Da $f(t)$ si definisce T di Laplace la seguente funzione:

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} dt f(t) e^{izt}$$

z è un numero complesso

Se $f(t) \sim O(e^{at})$ $t \rightarrow \infty$ allora $\tilde{f}(z)$ è analitica nel semipiano $Im(z) > a$

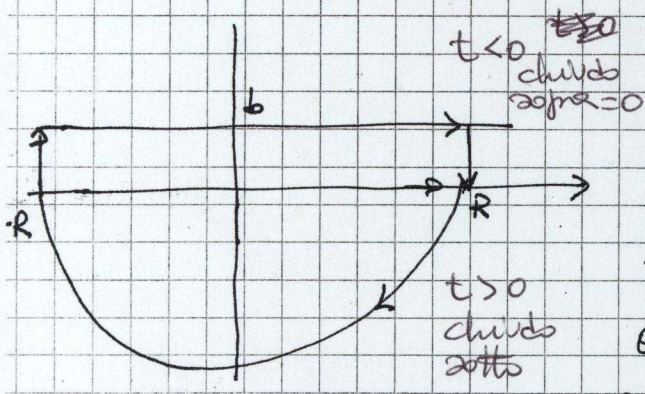
questi problemi nascono con ~~Foster~~
Laplace funzioni intere e analitiche con Foster.

La trasformata inversa è data dalla relazione:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a+ib}^{a+ib} dz e^{-izt} \tilde{f}(z)$$

Il cammino di integrazione è una retta orizzontale che si sposta all'infinito nel dominio di analiticità di $\tilde{f}(z)$ ($b > a$)

Poiché sopra la retta $Im(z) = b$ $\tilde{f}(z)$ è analitica, e e^{-izt} è intera, allora l'integrale che definisce la ILT (trasformata inversa) può essere calcolato dal th dei residui integrando sul seguente circuito:



Nel limite $R \rightarrow \infty$ l'integrale da calcolare diventa uguale a $-2\pi i$ Somma dei residui di $\tilde{f}(z) e^{-izt}$ perché per ipotesi le angolarità di $\tilde{f}(z)$ sono sotto $Im(z) = b$.

Quindi:

$$f(t) = -\frac{2\pi i}{2\pi} \sum \text{Res}[\tilde{f}(z) e^{-izt}]$$

Esempi:

$f(t)$	$\tilde{f}(z)$	
$e^{w_0 t}$	$\frac{1}{z - i w_0}$	$Im(z) > w_0$
$\sin w_0 t$	$-w_0 / [z^2 - w_0^2]$	$Im(z) > 0$
$\cos w_0 t$	$+iz / [z^2 - w_0^2]$	"
$\vdots$		

L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

Abbiamo quindi derivato le espressioni di bilancio per la ~~conservazione~~ densità di corrente di impulso, e le relazioni costitutive per il tensore degli sforzi. Da queste le possiamo derivare l'equazione di evoluzione del fluido:

$$\textcircled{1} \quad \partial_t \vec{J} + \nabla \cdot [\vec{v} \vec{J} - \underline{\underline{\sigma}}] = \rho \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad \text{densità di corrente di impulso}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\nabla \Phi \quad \text{potenziale del campo esterno}$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\underline{\sigma}}' = \eta \left[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \underline{\underline{1}} \right] + \zeta (\nabla \cdot \vec{v}) \underline{\underline{1}}$$

η = viscosità di taglio

ζ = viscosità di volume

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p \underline{\underline{1}} \quad p = \text{pressione idrostatica}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}' - \nabla p$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \eta \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$= \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}^2} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) =$$

$$= \eta \left[\vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla^2 \vec{v} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) =$$

$$= \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\underline{\underline{\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}}} = \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}})$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{\underline{v}})} + \underbrace{\underline{\underline{\nabla}} \cdot (\rho \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}})} = -\rho \underline{\underline{\nabla}} \phi - \underline{\underline{\nabla}} p + \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}})$$

||

$$\underline{\underline{v}} \partial_t \rho + \rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla}} p \cdot \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}} + \rho [\underline{\underline{\nabla}} \cdot (\underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}})] =$$

$$= \underline{\underline{v}} \partial_t \rho + \rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla}} p \cdot \underline{\underline{v}} \underline{\underline{v}} + \rho \left[(\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \right] = \oplus$$

eq. di continuità $\partial_t \rho + \rho \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \rho = 0$

$$\oplus = \underbrace{\underline{\underline{v}} [\partial_t \rho + \rho (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \rho]}_{0} + \rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \rho (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{NS}}: \left[\rho \partial_t \underline{\underline{v}} + \rho \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} = -\rho \underline{\underline{\nabla}} \phi - \underline{\underline{\nabla}} p + \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}) \right]$$

$$\left[\partial_t \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} = -\underline{\underline{\nabla}} \phi - \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\nabla}} p + \nu \nabla^2 \underline{\underline{v}} + \frac{\eta}{\rho} \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \underline{\underline{\nabla}} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}) \right]$$

$$\begin{cases} \nu = \frac{\eta}{\rho} = \text{VISCOSITA' CINEMATICA} \\ \zeta = \frac{\zeta}{\rho} \end{cases}$$

~~Eq~~ NS = EQUAZIONE CHE REGOLA IL CAMPO DI VELOCITA'

FLUIDO INCOMPRESSIBILE : $\rho = \text{costante} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

(54)

In queste ipotesi non c'è disomogeneità in effetti di dilatazione
pure, quindi la viscosità di BULK ~~sparisce~~ scompare, o meglio
l'ultimo termine scompare, mentre le forze di ~~visc~~ superficie
sono espresse interamente dall'ultimo termine proporzionale
alla viscosità cinematica del fluido.

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{T}}_{\text{termine convettivo}} = -\nabla \phi - \frac{\nabla p}{\rho} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{termine viscoso-diffusivo}}} \quad \text{NS-I}$$

FORMA ADIMENSIONALE - NUMERO DI REYNOLDS

Anche facendo l'ipotesi che ρ, μ sono costanti nel fluido, vediamo
che NSI è una eq. non lineare a causa del 2° termine
nel membro di sinistra, ossia le correnti convettive, e da
questo termine viene la completezza del moto dei fluidi
(turbolenza).

Non ci sono, ad oggi, fallimenti di questa teoria, se applicate
~~nei~~ nei vari limiti di validità (η è costante con $\frac{p}{\rho}$). Tuttavia
il termine convettivo ^{non} rende molto complicate le soluzioni.

● Cerchiamo di capire l'importanza relativa del termine
convettivo e del termine diffusivo.

Riscriviamo l'equazione in variabili adimensionali:

$$r' = \frac{r}{L}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad t' = \frac{t}{(L/U)}, \quad p' = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

dove L è la dimensione tipica del sistema (o ha due ostacoli),
 U è la velocità tipica (media) nel sistema.

Si ha: $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \equiv \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'}$

55

$$\nabla_r = \frac{1}{L} \nabla_{r'}$$

NSI: $\frac{U^3}{L} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \underline{v}' \cdot \nabla_{r'} \underline{v}' = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{L} \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla_{r'} p' + \nu \frac{U}{L^2} \nabla_{r'}^2 \underline{v}'$

dividendo tutto per U^2/L si ottiene

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + \underline{v}' \cdot \nabla \underline{v}' = -\nabla p' + \underbrace{\left(\frac{\nu}{UL} \right)}_{1/Re} \nabla^2 \underline{v}'$$

$Re = \frac{UL}{\nu}$ è detto numero di Reynolds = $\frac{\text{flusso convettivo}}{\text{flusso diffusivo}}$

misura Re non lineare dell'equazione.

$Re = \frac{\text{tempo tipico di diffusione}}{\text{tempo tipico di convezione}}$

$Re \rightarrow \infty$ il flusso diffusivo domina. ~~il profilo di velocità~~

Profilo di velocità ^{stazionario} ~~transiente~~ bilanciare delle forze di viscosità e del gradiente di pressione.

- $Re \rightarrow \infty$ se
- a) $U \rightarrow \infty$ Flussi molto lenti
 - b) $L \rightarrow 0$ dispositivi (o fenomeni) microscopici come batteri o microrganismi
 - c) $\nu \rightarrow \infty$ fluidi molto viscosi

~~FLUSSI LAMINARI~~ a $Re \ll 1$

FLUSSI STRUSCIANTI (CREEPING)

$Re \rightarrow \infty$ il flusso convettivo domina ed è determinato principalmente da effetti non lineari

■ L'operatore non lineare vettoriale mischia le componenti della velocità e genera flussi vorticosi.

~~Re $\rightarrow \infty$~~

REGIME TURBOLENTO: si osserva per velocità alte, a scale grandi o per fluidi di viscosità piccola.

CONDIZIONI AL BORDO:

Per le due eq. diff. derivate parziali devo specificare c.i. e condizioni al bordo,

INTERFACCIA SOLIDA: poiché il fluido non può penetrare dentro al solido ovvero, ~~deve~~

$$\vec{v}_{\text{solida}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{imp}} \cdot \vec{n}$$

ovvero la componente

normale alla superficie delle velocità del liquido è uguale alla velocità del solido.

Se la superficie è a riposo la componente $\perp$ a questa delle velocità del fluido è nulla.

Per la componente tangenziale abbiamo due casi:

① SLIP BOUNDARY: per un fluido ideale (viscosità nulla) il fluido può assumere qualsiasi velocità

② STICK BOUNDARY: se il fluido ha viscosità non nulla

si può mostrare che la viscosità previene lo scivolamento alla superficie. Si può mostrare che queste discontinuità genererebbe una densità infinita di energia.

Questo impone che le componenti tangenziali delle velocità del fluido e della superficie siano le stesse.

$$\underline{V}_{||}^{sol} = \underline{V}_{||}^{liq}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{V}_{sol} = \underline{V}_{liq}}$$

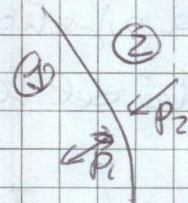
CONDIZIONI AL BORDO AD UNA INTERFACCIA TRA LIQUIDI

In questo caso non dobbiamo solo bilanciare le velocità attraverso l'interfaccia, ma anche assicurarsi che lo shear tensor sia continuo.

* FLUIDI IDEALI: Per i fluidi ideali ($\eta_i = 0$) solo la continuità dello shear normale all'interfaccia si applica. Preschi per dimostrare se $\eta = 0$ lo shear tangenziale è nullo.

Dalle legge di Laplace alla tensione superficiale sappiamo che la pressione ai due lati dell'interfaccia è regolata dalla tensione superficiale γ :

$$p_2 - p_1 = \gamma \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$



- Se l'interfaccia è piana $p_2 = p_1$

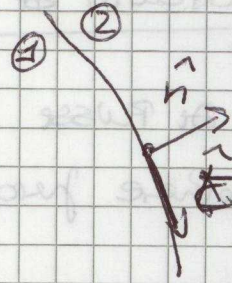
* FLUIDI REALI: $\eta_i > 0$

abbiamo qui anche un bilancio degli sforzi tangenziali alla interfaccia

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{\hat{n}}) \cdot \underline{\hat{t}} = (\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \underline{\hat{n}}) \cdot \underline{\hat{t}}$$

(57)

queste equazioni esprimono la
continuità delle forze di sforzo attraverso
l'interfaccia.



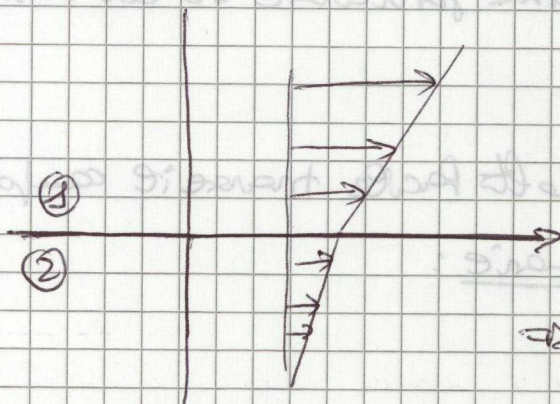
FLUIDI INCOMPRESSIBILI $\underline{\underline{\sigma}}^{(i)} = \eta \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}})^T \right]$

$$\Rightarrow \eta_1 \left(\left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(1)} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(1)})^T \right] \cdot \underline{\hat{n}} \right) \cdot \underline{\hat{t}} = \eta_2 \left(\left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(2)} + (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}}^{(2)})^T \right] \cdot \underline{\hat{n}} \right) \cdot \underline{\hat{t}}$$

INTERFACCIA

Esempio: INTERFACCIA PIANA

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$



$$\eta_1 \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ GRADIENTE DI VELOCITÀ ALL'INTERFACCIA
È INVERSAMENTE PROPORZ. ALLA
VISCOSITÀ

INTERFACCIA GAS-LIQUIDO: poiché la viscosità del gas

è $\eta_g \approx 0$ ~~abbastanza~~

la condizione di continuità

implica che la velocità tang. del fluido all'interfaccia
si annulla.

APPLICAZIONI DI NSI A CASI PARTICOLARI

NEL CASO DI FLUSSE 1D o quasi-1D l'eq. di NSI
si può mostrare perché il termine non lineare $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$
è nullo.

In fatti in 1D $v_y = 0, v_z = 0$

e se $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = v_x(y, z)$

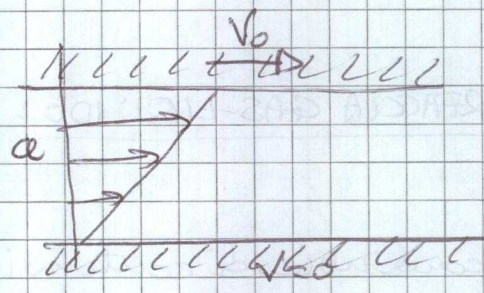
il termine non lineare è: $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} = 0$

Il termine viscoso è anche perché il fluido è
"incompressibile" e per la geometria particolare 1D del flusso,
non perché $Re \ll 1$.

In queste situazioni è molto facile trovare il campo di
velocità in stazioni stazionarie:

$$\eta \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} = \rho \nabla \phi + \nabla p$$

A) SIMPLE SHEAR FLOW:



$$\begin{cases} \hat{x}: \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \hat{y}: \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases}$$

per simmetria in $\hat{z}$ non ha nulla

Se $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_x = K_1 y + K_2$

b.c.: $\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_x(a) = V_0 \end{cases}$

$$v_x(y) = \frac{V_0}{a} y$$

In presenza di gravità (ρ) abbiamo solo un gradiente di pressione in y senza cambiare il fluido.

(58)

Se $\rho(x) = \rho_0 + b x$ gradiente di pressione lineare

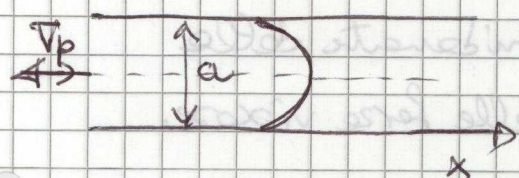
$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{b}{\eta} \rightarrow v_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 + k_1 y + k_2$$

$$\text{b.c.: } \begin{cases} v_x(0) = 0 \rightarrow k_2 = 0 \\ v_x(a) = v_0 \end{cases}$$

$$v_x(a) = \frac{b}{2\eta} a^2 + k_1 a = v_0 \rightarrow k_1 = \left(\frac{v_0}{a} - \frac{b a}{2\eta} \right)$$

$$v_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 + \left(\frac{v_0}{a} - \frac{b a}{2\eta} \right) y$$

⑧ FLUSSO DI POISEUILLE TRA PIANI PARALLELI



NS-I stazionaria

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = b$$

$$\text{b.c.: } \begin{cases} v_x(-a/2) = 0 \\ v_x(a/2) = 0 \end{cases}$$

$$v_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 + k_1 y + k_2$$

$$\begin{cases} v_x(-\frac{a}{2}) = \frac{b}{2\eta} \frac{a^2}{4} + k_1 \frac{a}{2} + k_2 = 0 \\ v_x(\frac{a}{2}) = \frac{b}{2\eta} \frac{a^2}{4} + k_1 \frac{a}{2} + k_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{somma: } \frac{b}{\eta} \frac{a^2}{4} + 2k_2 = 0 \\ \text{differenza: } k_1 a = 0 \end{cases}$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{b}{2\eta} \frac{a^2}{4} = -\frac{a^2 b}{8\eta}$$

$$V_x(y) = \frac{b}{2\eta} y^2 - \frac{a^2 b}{8\eta} = -\frac{a^2 b}{8\eta} \left(1 - \frac{4}{a^2} y^2\right)$$

profilo parabolico con $V_{\max} = V_x(0)$ nel piano equidistante dalle pareti

$$V_{\max} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{a^2}{8\eta}$$

Q = flusso per unità di lunghezza in $\hat{z}$

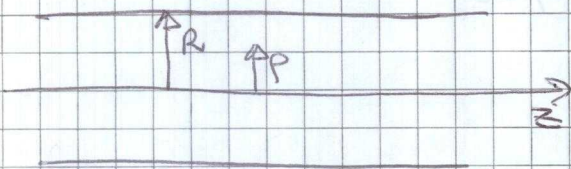
$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} V_x(y) dy = -\frac{a^2 b}{8\eta} \left[a - \frac{4}{a^2} \frac{a^3}{24} \right] =$$

$$= -\frac{a^2 b}{8\eta} \left[a - \frac{a}{3} \right] = -\frac{b}{12\eta} a^3$$

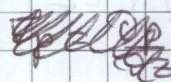
$$\left\{ \begin{array}{l} Q \sim a^3 \text{ per un dato gradiente di pressione} \\ A \sim a \end{array} \right.$$

Il flusso decresce molto più rapidamente dello zero del capillare a causa delle forze viscosi.

③ FLOSSO DI POISEUILLE IN CONDOTTO CILINDRICO



Piano in coordinate cilindriche.



Per simmetria $V_\varphi = 0$ e non c'è componente della velocità lungo circonferenza causata dalle pareti del cilindro

Da $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ e se v_z non dipende da z (non deve essere per simmetria) abbiamo:

(59)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) = 0 \rightarrow v_\rho + \rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{\partial v_\rho}{v_\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{v_\rho(\rho)}{v_\rho(R)} = \frac{R}{\rho} \rightarrow \rho v_\rho(\rho) = R v_\rho(R) = 0 \text{ (b.c.)}$$

$$\Rightarrow v_\rho(\rho) = 0 \quad \forall \rho \in [0, R]$$

NS-I:

$$-\frac{\partial p}{\partial \rho} - \rho g \cos \varphi = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho g \sin \varphi = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) = 0$$

In presenza di gravità si stabilisce un gradiente di pressione lungo ρ e φ (quindi nel piano $\perp$ al flusso) che non influisce il flusso stesso.

la velocità lungo z è determinata dal gradiente di pressione lungo z

$$\propto -\frac{\partial p}{\partial z} = b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) = -\frac{b}{\eta}$$

b.c.: $v_z(R) = 0$

$$v_z(\rho) = v_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) ; \quad v_0 = \frac{b R^2}{4\eta} \quad \text{velocità max nell'asse lungo l'asse.}$$

Il flusso Q attraverso una sezione del tubo è:

$$Q = \int_0^R 2\pi \rho v_z(\rho) d\rho = \frac{\pi b R^4}{8\eta} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \sim R^4 \\ A \sim R^2 \end{array} \right.$$

Consideriamo un tubo di diametro R e 100 tubi di diametro $R/10$ messi in parallelo. ~~La~~ Il flusso dovuto dallo stesso gradiente di pressione è

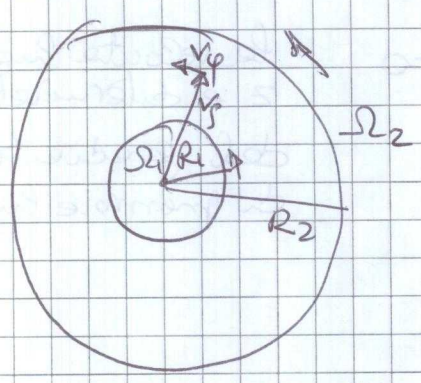
$$Q_1 \sim R^4 \quad Q_2 \sim 100 \left(\frac{R}{10}\right)^4 = 100 \frac{R^4}{10^4} = \frac{R^4}{100}$$

mentre le sezioni totali sono uguali

Questa situazione è molto diversa dalle correnti elettriche nei cavi in parallelo in cui la corrente è proporzionale alle resistenze ~~e la resistenza~~. La differenza sta nelle condizioni al bordo ($v(R) = 0$) che aumentano l'"abito" per sezioni piccole.

⑤ FLUSSO DI COUETTE CILINDRICO

Flusso generato tra due cilindri concorrenti rotanti a diverse velocità angolari



In assenza di gradiente di pressione $\nabla p = 0$ lavoriamo in coordinate cilindriche con $\hat{z}$ = axe dei cilindri.

~~Per un'analisi completa vedersi il libro di Kundert~~

Questa semplice geometria è quella dei nodi viscosi. A seconda delle velocità angolari si possono avere diversi regimi di flusso (vedi Feynman). Qui ci interessiamo solo al regime a piccoli Ω in cui il flusso è regolare in cui la pressione e i componenti di velocità sono indipendenti da $\hat{z}$ e ϕ .

In questa situazione per simmetria di traslazione in $\hat{z}$ dobbiamo avere $v_z = 0$

(6)

Inoltre v_φ non dipende da φ perché c'è simmetria di rotazione intorno all'asse.

Per un fluido incompressibile $\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \boxed{v_\rho = \frac{C}{\rho}}$$

Ma per b.c. $v_\rho(R_1) = v_\rho(R_2) = 0 \Rightarrow v_\rho = 0 \quad \forall \rho$

NS-I: ~~non stazionaria~~ stazionaria.

STAZIONARIA IN COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} -\frac{v_\varphi^2}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & (1) \\ \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho^2} \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

① Forza centrifuga (inertiale) causata dalla curvatura delle traiettorie e bilanciata da un gradiente di pressione nelle direzioni radiali.

Calcolare la v_φ^2 ma questa espressione non influisce il flusso ~~forza~~

② applichiamo in coordinate cilindriche

Cerchiamo una soluzione del tipo: $v_\varphi = a\rho + \frac{b}{\rho}$

le condizioni al bordo impongono.

$$\begin{cases} v_\varphi(\rho=R_1) = \Omega_1 R_1 \\ v_\varphi(\rho=R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{v_\varphi(\rho)} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\Rightarrow V_{\varphi}(p) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} p + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{p}$$

la distribuzione delle premiere $p(p)$ può essere ottenuta dalla eq (3)

CASI PARTICOLARI:

① $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ $R_2 - R_1 = d \Rightarrow$ FLUSSO DI COETTE PLANARE

② $\Omega_1 = \Omega_2 \Rightarrow V_{\varphi}(p) = \Omega p$ Rotazione di corpo rigido

③ $\Omega_2 = 0, R_2 \rightarrow \infty$ equivalente a rimuovere il cilindro esterno

$$V_{\varphi}(p) = \frac{(\Omega_1 R_1^2)}{p}$$

campo di velocità potenziale
di un 2D flusso vorticoso. (vedi
dopo).

EQUAZIONE DI BILANCIO PER L'ENERGIA ED ENTROPIA

(61)

Abbiamo ottenuto l'espressione di bilancio per la densità di energia e (energia per unità di volume) come:

$$\partial_t e + \nabla_r \cdot [\underline{\overset{D}{J}}_q + \underline{v} e - \underline{v} \cdot \underline{\sigma}] = 0 \quad \nabla_r (\underline{J}_e^e + \underline{J}_e^D)$$

come al solito
dove abbiamo una corrente convettiva $\underline{J}_e^e = \underline{v} e$ e
una corrente dissipativa $\underline{J}_e^D = [\underline{\overset{D}{J}}_q - \underline{v} \cdot \underline{\sigma}]$

~~Allo stesso modo possiamo scrivere una equazione di bilancio per la densità di entropia s . In questo caso invece però un termine di sorgente perché s non è conservata:~~

~~DA (PS) *~~

Possiamo considerare invece l'energia per unità di massa e'

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unità di} \\ \text{volume}}}{e} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unità di} \\ \text{volume}}}{pe'} \quad \text{dove} \quad pe' = pu + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi$$

$\uparrow$
energia termica per
unità di massa
del campo esterno,

Allo stesso modo possiamo considerare l'entropia per unità di massa, e una equazione per il suo bilancio:

$$\partial_t (ps) + \nabla_r \cdot (\underline{J}_s^R + \underline{J}_s^D) = \sigma_s$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 entropia per $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 unità di massa $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 corrente non $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 dissipativa $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 corrente dissipativa $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 termine di sorgente

IPOTESI DI EQUILIBRIO LOCALE: localmente valgono le relazioni termodinamiche all'equilibrio

come possiamo definire due campi locali indipendenti e considerare la dipendenza da $\vec{r}$ e t degli altri attraverso la dipendenza di quelli indipendenti e dalle relazioni termodinamiche dell'equilibrio.

Relazione fondamentale $\frac{U}{V} = pu = Tps - P + \tilde{\mu}p$

$$\begin{cases} S = \text{entropia per unit\`a di volume} \\ u = \text{energia per unit\`a di volume} \\ \tilde{\mu} = \text{potenziale chimico per unit\`a di volume} \end{cases}$$

Usando Gibbs-Duhem ~~non~~ ($p d\tilde{\mu} + ps dT - dp \stackrel{!}{=} 0$)

$$\Rightarrow d(pu) = T d(ps) + \tilde{\mu} dp$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [pu] - T \frac{d}{dt} [ps] + \tilde{\mu} \frac{dp}{dt} = \partial_t(pu) - T \partial_t(ps) + \tilde{\mu} \partial_t p$$

$$+ \underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r(p) = 0$$

ma $\underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r(p) =$

~~$$\underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r(p) =$$~~

$$\begin{cases} \underline{v} \cdot \nabla_r(pu) = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} pu] - pu \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} \\ + T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} T ps] - T ps \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} - ps \underline{v} \cdot \nabla_r T \\ + \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r p = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} \tilde{\mu} p] - p \tilde{\mu} \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} - p \underline{v} \cdot \nabla_r \tilde{\mu} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \cdot \nabla_r(pu) - T \underline{v} \cdot \nabla_r(ps) - \tilde{\mu} \underline{v} \cdot \nabla_r p = \underline{\nabla}_r \cdot [\underline{v} (pu - Tps - \tilde{\mu} p)] +$$

$$+ ps \underline{v} \cdot \nabla_r T + p \underline{v} \cdot \nabla_r \tilde{\mu} + \underbrace{[Tps + \tilde{\mu} p - pu]}_{-P} \underline{\nabla}_r \cdot \underline{v} =$$

$$= \underline{v} \cdot [\rho_s \underline{\nabla}_r T + \rho \underline{\nabla}_r \tilde{\mu} - \underline{\nabla}_r P] = 0$$

perché (GD) $\rho s dT + \rho d\tilde{\mu} - dP = 0$

$$\Rightarrow \frac{d(\rho u)}{dt} + \frac{T d(\rho s)}{dt} - \tilde{\mu} \frac{d\rho}{dt} = \partial_t(\rho u) - T \partial_t(\rho s) - \tilde{\mu} \partial_t \rho$$

Assumiamo ora $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow p_e = p_u + \frac{1}{2} \rho v^2$

$$\frac{\partial(p_e)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_t(\rho u) + \underline{v} \cdot \partial_t(\rho \underline{v}) - \frac{1}{2} v^2 \partial_t \rho$$

quindi $T \partial_t(\rho s) = \partial_t(\rho e) - \underline{v} \cdot \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} v^2 - \tilde{\mu}\right) \partial_t \rho$

ora $\partial_t \rho = -\underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v})$

ora $\partial_t(\rho \underline{v}) = -\underline{\nabla}_r \cdot [\rho \underline{v} \underline{v} + p \underline{v} \underline{v} \otimes \underline{e}]$

$\partial_t(\rho e) = -\underline{\nabla}_r \cdot [\bar{\mathcal{J}}_e^R + \bar{\mathcal{J}}_e^D]$

$$\Rightarrow T \partial_t(\rho s) = -\underline{\nabla}_r \cdot (\bar{\mathcal{J}}_e^R + \bar{\mathcal{J}}_e^D) + \underline{v} \cdot [\underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v} \underline{v} + p \underline{v} \underline{v} \otimes \underline{e})] - \left(\frac{1}{2} v^2 - \tilde{\mu}\right) \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v})$$

ora $\underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \underline{\nabla}_r \rho \cdot \underline{v} \underline{v} + \rho (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} + \rho \underline{v} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) =$
 $= \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{v} \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v})$

ma e: $\underline{v} \cdot \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \underline{v} \cdot [\rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla}] \underline{v} + v^2 \underline{\nabla}_r \cdot (\rho \underline{v}) = \textcircled{1}$

$$\textcircled{1} = \sum_i v_i \rho \sum_k v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i = \sum_{ik} \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \rho \sum_k v_k \frac{\partial}{\partial x_k} (v^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla}_r (v^2)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \nabla_r (v^2) + v^2 \nabla_r (\rho \underline{v}) = \frac{1}{2} v^2 \nabla_r (\rho \underline{v}) + \frac{1}{2} \nabla_r \cdot (\rho v^2 \underline{v})$$

$$T \partial_t (\rho s) = - \nabla_r \cdot (\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D) + \underline{v} \cdot \nabla p + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho v^2 \underline{v}) + \frac{1}{2} \cancel{v^2} \nabla \cdot \rho \underline{v} + \\ - \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} - \left(\frac{1}{2} v^2 \tilde{\mu} \right) \nabla \cdot (\rho \underline{v})$$

molte:

$$\begin{cases} \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} = \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) - \underline{\sigma} : \nabla \underline{v} \\ \tilde{\mu} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \nabla \cdot (\rho \tilde{\mu} \underline{v}) - \rho \underline{v} \cdot \nabla \tilde{\mu} \end{cases}$$

$$T \partial_t (\rho s) = - \nabla_r \cdot [\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D] + \underline{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \tilde{\mu} \rho \right) \underline{v} \right] - \rho \underline{v} \cdot \nabla \tilde{\mu} + \\ + \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) + \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}$$

ora da GD: $\rho s dT + \rho d\tilde{\mu} - dp = 0 \Rightarrow \underline{v} \cdot [\rho \nabla \tilde{\mu} - \nabla p] = - \rho s \underline{v} \cdot \nabla T$

$$\Rightarrow T \partial_t (\rho s) = - \nabla \cdot [\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D - \rho \mu' \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}] + \rho s \underline{v} \cdot \nabla T + \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}$$

con $\mu' = \frac{1}{2} v^2 + \tilde{\mu}$

Per ottenere un'equazione di bilancio dobbiamo dividere per T entrambi i membri, e riarrangiando le cose, si ottiene:

$$\partial_t (\rho s) = - \nabla \cdot \left(\frac{\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D - \rho \mu' \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}}{T} \right) + \left(\frac{\underline{J}_e^R + \underline{J}_e^D - \rho \mu' \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}}{T} \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} \underline{\sigma} : \nabla \underline{v} \quad (44)$$

Consideriamo dapprima il caso di fluido ideale:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{J_e^D}} = \underline{\underline{0}} & \text{densità di corrente dissipativa di energia} \\ \underline{\underline{\sigma_s}} = \underline{\underline{0}} & \text{produzione di entropia} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J_e^R}} = \rho \underline{\underline{h}} \cdot \underline{\underline{v}} + \rho s T \underline{\underline{v}} = \rho \left[s T + \tilde{u} + \frac{1}{2} v^2 \right] \underline{\underline{v}} = \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) \underline{\underline{v}}$$

con $h = \text{entalpia per unità di massa}$ $\rho h = \rho u + p$

sostituendo in $\textcircled{A}$ per il sistema ideale si ha:

$$\boxed{\rho_t(p s) = -\nabla \cdot (\rho s \underline{\underline{v}})} \quad \text{EQUAZIONE DI BILANCIO DI ENTROPIA NEL FLUIDO IDEALE}$$

Sostituendo ora la linea di $\underline{\underline{J_e^R}}$ nella $\textcircled{A}$ si ottiene l'espressione di bilancio per il fluido viscoso (dissipativo):

$$\rho_t(p s) = -\nabla \cdot \left[\rho s \underline{\underline{v}} + \frac{\underline{\underline{J_e^D}}}{\tau} + \frac{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}}}{\tau} \right] + \frac{1}{\tau} \left[\underline{\underline{J_e^D}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}} \right] \cdot \frac{\nabla T}{T} + \frac{1}{\tau} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}}$$

definiamo $\underline{\underline{J_s^D}} = \frac{(\underline{\underline{J_e^D}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}})}{\tau}$ si ha:

$$\boxed{\rho_t(p s) = -\nabla \cdot [\rho s \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{J_s^D}}] - \frac{1}{\tau} [\underline{\underline{J_s^D}} \cdot \frac{\nabla T}{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}}]}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma_s}} = -\frac{1}{\tau} (\underline{\underline{J_s^D}} \cdot \frac{\nabla T}{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}})} \quad \begin{array}{l} \text{PRODUZIONE DI ENTROPIA} \\ \text{FLUSSO X CAMPI CONIUGATO} \end{array}$$

σ_s è l'equivalente idrodinamico ~~del riscaldamento~~ delle dissipazioni di Joule in un conduttore J·E (corrente x campo).

$$\begin{cases} \underline{\underline{J_s^D}}, \underline{\underline{\sigma}} & \text{correnti generalizzate} \\ \underline{\underline{\nabla T}}, \underline{\underline{\nabla v}} & \text{FORZE GENERALIZZATE} \end{cases}$$

Relazioni costitutive: relazioni lineari tra flussi e forze:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \eta \left[\underline{\underline{\nabla v}} + (\underline{\underline{\nabla v}})^T \right] + \left(\xi + \frac{2}{3} \eta \right) (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{1}} \quad \text{NEWTON}$$

introduciamo ora la legge di Fourier tra la corrente di entropia dissipativa e il gradiente termico:

$$\underline{\underline{J}}_S^D = - \frac{k}{T} \underline{\underline{\nabla T}} \quad k = \text{CONDUCIBILITA' TERMICA}$$

NOTA: non abbiamo effetti meccanici di $\underline{\underline{\nabla T}}$ e $\underline{\underline{\nabla v}}$ in $\underline{\underline{J}}_S^D$ e $\underline{\underline{\sigma}}$ per via delle simmetrie del sistema: un vettore non può perturbare un tensore per motivi di simmetria.

sostituendo queste relazioni nelle relazioni per la produzione di entropia σ_S si ottiene:

$$\sigma_S = - \frac{1}{T} \left[- \frac{k}{T} |\underline{\underline{\nabla T}}|^2 - \eta (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{\nabla v}}^T) : \underline{\underline{\nabla v}} - \left(\xi + \frac{2}{3} \eta \right) (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\nabla v}} \right]$$

$$\text{ora } \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\nabla v}} = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} : \underline{\underline{\nabla v}} = (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})^2 + \sum_{i,j} \frac{\partial_j v_i}{\partial_i v_j}$$

$$\sigma_S = \frac{k}{T^2} (\underline{\underline{\nabla T}})^2 + \frac{2\eta}{T} \left[\overset{\Gamma_2}{\underline{\underline{K}}} : \underline{\underline{\nabla v}} \right] + \frac{\xi}{T} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})^2$$

$$\underline{\underline{K}} = \left[\underline{\underline{\nabla v}} + (\underline{\underline{\nabla v}})^T - \frac{2}{3} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{1}} \right]$$

$\Gamma_2 = \text{SECONDO INVARIANTE SCALARE}$

$$\begin{cases} \partial_t p + \nabla \cdot (p \underline{v}) = 0 \\ \partial_t (p \underline{v}) + \nabla \cdot (p \underline{v} \underline{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla (\nabla \cdot \underline{v}) \\ \partial_t (p s) + \nabla \cdot (p s \underline{v} + \underline{J}^D) = \frac{\kappa}{T^2} |\nabla T|^2 + \frac{2\eta}{T} T_2 + \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \underline{v})^2 \end{cases}$$

EQUAZIONI IDRODINAMICHE

LINEARIZZAZIONE: questo set di equazioni sono non lineari e molto complicate da risolvere.

Possiamo tuttavia, se le fluttuazioni dall'eq. sono piccole, linearizzarle per ottenere un set di equazioni trattabili. Il sistema di equazioni che si ottengono descrivono adeguatamente le piccole fluttuazioni intorno all'equilibrio termod. del sistema.

Chiamiamo p_0, T_0, s_0, p_0 la densità, temperatura, entropia per unità di volume, e pressione di equilibrio del sistema.

Vicino all'eq. si ha:

$$\begin{cases} p(\underline{r}, t) = p_0 + \delta p(\underline{r}, t) \\ T(\underline{r}, t) = T_0 + \delta T(\underline{r}, t) \\ s(\underline{r}, t) = s_0 + \delta s(\underline{r}, t) \\ p(\underline{r}, t) = p_0 + \delta p(\underline{r}, t) \end{cases}$$

All'equilibrio il campo di velocità è zero e quindi i termini in cui appare $\underline{v}$ sono già al primo ordine nelle fluttuazioni.

Riscriviamo le equazioni idrodinamiche per le fluttuazioni al primo ordine:

(64b)

$$\begin{cases} \partial_t(\delta p) + \nabla(p_0 \underline{v}) = \partial_t(\delta p) + p_0 \nabla \cdot \underline{v} = 0 & (1) \\ p_0 \partial_t \underline{v} = -\nabla(\delta p) + \eta \nabla^2 \underline{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) & (2) \\ p_0 \partial_t(\delta s) + s_0 \partial_t(\delta p) + p_0 s_0 \nabla \cdot \underline{v} - \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2 \delta T = 0 \end{cases}$$

usando la (1) per eliminare il 2° e 3° termine nelle (2) e (3) si ottiene

$$p_0 \partial_t(\delta s) = \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2(\delta T) \quad (3)$$

Abbiamo quindi 5 equazioni in 7 incognite:

$$\delta p, \delta p, \delta T, \delta s, v_x, v_y, v_z$$

Però nell'ipotesi di equilibrio locale solo 2 variabili termodinamiche sono indipendenti, scegliamo ad esempio $\delta p, \delta T$ come indipendenti. Si ha:

$$\begin{cases} \delta s(\underline{r}, t) = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \delta p(\underline{r}, t) + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \delta T(\underline{r}, t) \\ \delta p(\underline{r}, t) = \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T \delta p(\underline{r}, t) + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p \delta T(\underline{r}, t) \end{cases}$$

Con queste relazioni le equazioni idrodinamiche ~~sono~~ diventano:

$$\begin{cases} \partial_t(\delta p) + p_0 \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ p_0 \partial_t \underline{v} = -\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T \nabla(\delta p) - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p \nabla(\delta T) + \eta \nabla^2 \underline{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \\ ~~p_0 \partial_t(\delta s) = \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2(\delta T)~~ p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \partial_t(\delta p) + p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \partial_t(\delta T) = \frac{\kappa}{T_0} \nabla^2(\delta T) \end{cases}$$

FLUIDO IDEALE: $\eta = \xi = \kappa = 0$

(65) $\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \right]$

~~XXXXXXXXXX~~

Dalla terza equazione: $\partial_t(\delta T) = - \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \partial_t(\delta p) = + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \partial_t(\delta p)$

la seconda eq:

$$\rho_0 \partial_t \underline{v} = - \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \nabla(\delta p) - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \nabla(\delta T)$$

prendendo la derivata temporale si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_t^2 \underline{v} &= \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \nabla(\delta p)} - \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \nabla \partial_t(\delta p) - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \nabla(\partial_t \delta T) \\ &= - \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \right] \nabla[\partial_t(\delta p)] \end{aligned}$$

ma $\partial_t \delta p = -\rho_0 \nabla \cdot \underline{v}$ (continuità)

$$\Rightarrow \partial_t^2 \underline{v} + \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) = 0$$

con $\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$

Se consideriamo il caso unidimensionale $\underline{v} = v_x(x)$
 questa equazione descrive un'onda che si propaga con
 velocità $c_s = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s \right]^{1/2}$.

$$\partial_t^2 v_x + c_s^2 \partial_x^2 v_x = 0$$

ONDE SONORE IN

UN FLUIDO IDEALE

ONDE LONGITUDINALI

UN FLUIDO IDEALE SOSTIENE ONDE SONORE LONGITUDINALI LA CUI
 VELOCITÀ È DETERMINATA DALLA COMPRESSIBILITÀ ADIABATICA
 DEL FLUIDO.

In un fluido dissipativo, i modi acustici saranno ~~de~~attenuati. Determiniamo ora le relazioni di dispersione per i modi normali di un fluido dissipativo.

A questo scopo introduciamo i campi trasformati con Fourier dei campi idrodinamici;

$$\hat{p}_{\vec{k}}(t) = \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta p(\vec{r}, t) \iff \delta p(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \hat{p}_{\vec{k}}(t) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Eg. Equazioni idrodinamiche:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{p}_{\vec{k}}(t) + i \rho_0 \vec{k} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}}{\partial t} = -i \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\vec{k}} \vec{k} \hat{p}_{\vec{k}} + i \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\vec{k}} \hat{T}_{\vec{k}} - \eta k^2 \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} - \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{k} (\vec{k} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}) \\ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T \partial_t \hat{p}_{\vec{k}} + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \partial_t \hat{T}_{\vec{k}} = - \frac{\kappa}{T_0} k^2 \hat{T}_{\vec{k}} \end{cases}$$

Separiamo la velocità in componente longitudinale ($\parallel \vec{k}$) e trasversale ($\perp \vec{k}$):

$$\hat{\vec{v}}_{\vec{k}}(t) = \hat{v}_{\vec{k}}^{\parallel}(t) \hat{\vec{k}} + \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}^{\perp}(t)$$

$$\begin{cases} \hat{v}_{\vec{k}}^{\parallel} = \hat{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} \\ \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}^{\perp} = \left(\mathbb{I} - \hat{\vec{k}} \hat{\vec{k}} \right) \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} \end{cases} \quad \begin{aligned} \hat{\vec{v}}_{\vec{k}}^{\parallel} &= \hat{\vec{k}} \hat{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} + \left(\mathbb{I} - \hat{\vec{k}} \hat{\vec{k}} \right) \cdot \hat{\vec{v}}_{\vec{k}} \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\text{longitudinale} \quad \text{trasversale} \end{aligned}$$

Nel regime lineare (piccole fluttuazioni) le componenti della velocità longitudinale e trasversale si disaccoppiano e quindi evolvono secondo diverse equazioni del moto.

Inoltre le componenti longitudinale hanno accoppiamento con la temperatura mentre le altre, trasversali, ~~non~~ mantengono indipendenti.

Si ha:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{p}_k + i \rho_0 k v_k = 0 \\ \rho_0 \partial_t v_k = -i k \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \hat{p}_k + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \hat{T}_k \right] - \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) k^2 v_k \\ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T \partial_t \hat{p}_k + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho \partial_t \hat{T}_k = - \frac{\kappa}{T_0} k^2 \hat{T}_k \end{cases} \quad (14.4)$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_k^\perp = -\eta k^2 \vec{v}_k^\perp \quad \text{2 equazioni}$$

Le prime 3 equazioni governano il moto dei modi sonori e termici accoppiati (modi sonori sono onde longitudinali nel fluido), le ultime due equazioni (di diffusione) governano i modi di shear (oscillazioni trasversali).

Vogliamo trovare una soluzione delle eq. (14.4) per un dato valore iniziale dei campi (open boundaries):

$$\hat{p}_k(0), \hat{T}_k(0), \vec{v}_k(0)$$

Introduciamo le trasformate di Laplace dei campi:

$$\begin{cases} \tilde{p}_k(z) = \int_0^\infty dt \hat{p}_k(t) e^{izt} & \text{Im}(z) > \alpha \\ \hat{p}_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} dz \tilde{p}_k(z) e^{-izt} & t \geq 0 \end{cases}$$

Le trasformate per le derivate sono:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt (\partial_t \tilde{p}_k) e^{izt} &= \left[\tilde{p}_k e^{izt} \right]_0^\infty - \int_0^\infty dt \partial_t (e^{izt}) \tilde{p}_k(t) = \\ &= -\tilde{p}_k(0) - iz \tilde{p}_k(z) \end{aligned}$$

Le equazioni si hanno per cui quindi:

$$\begin{cases} -i z \tilde{p}_k(z) + i p_0 k \tilde{V}_k''(z) = + \hat{p}_k(0) \\ -i z p_0 \tilde{V}_k''(z) + i k \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \tilde{p}_k(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) \right] + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) k^2 \tilde{V}_k''(z) = + \hat{V}_k''(0) \\ -i z \left[\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \tilde{p}_k(z) + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) \right] + \frac{k}{T_0} k^2 \tilde{T}_k(z) = + p_0 \left[\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \hat{p}_k(0) + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \hat{T}_k(0) \right] \\ -i z p_0 \tilde{V}_k^\perp(z) + \eta k^2 \tilde{V}_k^\perp(z) = + p_0 \hat{V}_k^\perp(0) \end{cases}$$

Usiamo ora alcune relazioni termodinamiche per semplificare un po':

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = \frac{c_0^2}{\gamma} = \frac{(\text{velocità del suono adiabatica})^2}{\frac{c_p}{c_p}} = \frac{(\partial p / \partial p)_s}{c_p / c_p} = c_T^2 \text{ velocità isoterma del suono}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = p_0 \frac{c_0^2 \alpha_p}{\gamma} = \frac{p_0}{T_0} \frac{c_p - c_p}{\alpha_p}$$

α_p coefficiente di espansione a p costante

$$c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \text{calore specifico a densità costante}$$

$$\alpha_p = - \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = \text{coefficiente termico}$$

$$v_e = \frac{1}{p_0} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \text{ viscosità cinematica longitudinale}$$

$$v_t = \frac{\eta}{p_0} \text{ viscosità cinematica trasversale}$$

$$\chi = \frac{k}{p c_p} \text{ diffusività termica}$$

~~Per risolvere le equazioni differenziali in~~
 ~~$-iz \tilde{p}_k(z) + i \rho_0 \tilde{v}_k''(z) = \hat{p}_k(\omega)$~~

Prima di trasformare con Laplace eliminiamo $\hat{p}_k$ dalle
 terza equazione ~~data~~ usando la prima:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \hat{p}_k + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T (-ik \rho_0 \hat{v}_k'') = -\frac{k}{T_0} k^2 \hat{T}_k$$

Ora operiamo con Laplace e otteniamo:

$$\begin{cases} -iz \tilde{p}_k(z) + i \rho_0 \tilde{v}_k''(z) = \hat{p}_k(\omega) \\ -iz \tilde{v}_k''(z) + iz \left[\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \tilde{p}_k(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) \right] + \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) k^2 \tilde{v}_k''(z) = \hat{v}_k''(\omega) \\ -iz \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \tilde{T}_k(z) + \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T [-ik \rho_0 \tilde{v}_k''(z)] + \frac{k}{T_0} k^2 \tilde{T}_k(z) = \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \hat{T}_k(\omega) \\ -iz \rho_0 \tilde{v}_k^+(z) + \eta k^2 \tilde{v}_k^-(z) = \rho_0 \hat{v}_k^+(\omega) \quad (2 \text{ eq.}) \end{cases}$$

Usiamo ora alcune relazioni termodinamiche per semplificare:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = \frac{c_s^2}{\gamma} = \gamma^2$$

c_s = velocità adiabatica del suono

γ = velocità isoterma del suono

$$\gamma = c_p / c_v$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p = \rho_0 \frac{c_s^2 \alpha_p}{\gamma} = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{c_p - c_v}{\alpha_p}, \quad c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$$

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \text{espansione termica}$$

$$\nu_e = \frac{1}{\rho_0} \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) = \text{viscosità cinematica longitudinale}$$

$$\nu_t = \eta / \rho = \text{viscosità cinematica trasversale}$$

$$\chi = \frac{k}{\rho c_p} = \text{diffusività termica}$$

o/c

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{\rho_0} \gamma^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \quad (\text{relazioni di Maxwell})$$

le equazioni prendono la forma

$$\begin{cases} -iz \tilde{p}_k(z) + i\rho_0 k \tilde{v}_k''(z) = \hat{p}_k(0) \\ (-iz + \nu_k k^2) \tilde{v}_k''(z) + ik \frac{c_s^2}{r\rho_0} \tilde{p}_k(z) + ik \frac{c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \tilde{T}_k(z) = \hat{v}_k''(0) \\ \cancel{\tilde{p}_k(z)} \\ \frac{c_p}{\rho_0} (-iz + \gamma \chi k^2) \tilde{T}_k(z) + ik \frac{c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \tilde{v}_k''(z) \frac{T_0}{\theta} = \frac{c_p}{\rho_0} \frac{\hat{T}_k(0)}{T_0} \end{cases}$$

$$(-iz + \nu_k k^2) \tilde{v}_k^+(z) = \hat{v}_k^+(0)$$

È un sistema di 5 eq. lineari in 5 incognite.

MODI TRASVERSI

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k^+(z) &= \frac{\hat{v}_k^+(0)}{-iz + \nu_k k^2} = \frac{\hat{v}_k^+(0)}{i \left[\frac{\nu_k k^2}{i} - z \right]} = \\ &= \frac{\hat{v}_k^+(0)}{i \left[-i\nu_k k^2 - z \right]} = \frac{\hat{v}_k^+(0)}{-i \left[z + i\nu_k k^2 \right]} \end{aligned}$$

Laplace inversa: $\hat{v}_k^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz \tilde{v}_k(z) e^{-izt} \quad (b=0)$

$b=0$ perché $\hat{v}_k^+(z)$ è analitica ovunque tranne in $z_0 = -i\nu_k k^2$ che è nel semipiano negativo

Im(z)

che è nel semipiano negativo

Re(z)

$\times z_0 = -i\nu_k k^2$

Per calcolare l'integrale e per $t > 0$ devo chiudere sotto

$$\begin{aligned} \hat{v}_k^+(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{-izt} \tilde{v}_k(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res} \left[e^{-izt} \tilde{v}_k(z), z_0 \right] = \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{v}_k^+(t) = \hat{v}_k^+(0) e^{-\nu_k k^2 t}}$$

EQUAZIONE
DI DIFFUSIONE

MODI TRASVERSI: FLUTTUAZIONI DI VELOCITA' TRASVERSE

67

DECADONO SENZA PROPAGARSI

Se chiamiamo $\tau(k) = \frac{1}{\gamma k^2}$ $\hat{v}_k^\perp(t) = \hat{v}_k^\perp(0) e^{-t/\tau(k)}$

$\Rightarrow$ le lunghezze d'onda ^{grandi} ~~piccole~~ ($k \rightarrow 0$) decadono molto più lentamente di quelle piccole

CARATTERISTICA DEI MODI IDRODINAMICI $\tau(k) \rightarrow \infty$
(Quantità conservate) $k \rightarrow 0$

MODI LONGITUDINALI

Queste eq. possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -iz & i\rho_0 k & 0 \\ \frac{ik c_s^2}{\rho_0} & (-iz + \gamma k^2) & \frac{ik c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \\ 0 & +ik \frac{c_s^2 \alpha_p T_0}{\rho_0 c_p} & (-iz + \gamma \chi k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_k(z) \\ \tilde{v}_k''(z) \\ \tilde{T}_k(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_k(0) \\ \hat{v}_k''(0) \\ \hat{T}_k(0) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}(z, k) \cdot \underline{\tilde{\Phi}}_k(z) = \underline{\hat{\Phi}}_k(0)$$

$$\underline{\tilde{\Phi}}_k(z) = \underline{\underline{M}}^{-1}(z, k) \cdot \underline{\hat{\Phi}}_k(0)$$

la relazione di dispersione dei modi è determinata dalle radici del determinante di $\underline{\underline{M}}$, ome dai poli delle matrici idrodinamiche inverse $\underline{\underline{M}}^{-1}$:

$$D(z, k) = |M(z, k)| = 0$$

~~questo è il determinante~~

$$D(z, k) = -iz \left[(-iz + \gamma k^2)(-iz + \gamma \chi k^2) + ik \frac{c_s^2 \alpha_p T_0}{\rho_0 c_p} \frac{ik c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \right] - \frac{\rho_0}{\gamma}$$

$$-i\rho_0 k \left[\frac{i k c_s^2}{\rho_0} (-iz + j\chi k^2) \right] =$$

$$D(z, k) = iz^3 - z^2 k^2 (\nu_e + j\chi) - iz k^2 \left[\frac{c_s^2}{\rho} + \frac{c_s^4 \alpha_p^2 T_0}{\rho^2 c_p} + k^2 \nu_e j\chi \right] + k^4 c_s^2 \chi$$

①
②
③

$$① + ② = \frac{c_s^2}{\rho} \left[1 + \frac{c_s^2 \alpha_p^2 T_0}{\rho c_p} \right] = \frac{c_s^2}{\rho} [1 + j - 1] = c_s^2$$

Poiché l'idrodinamica lineare vale solo per perturbazioni lente spaziali e temporali dei campi possiamo limitarci ai termini ① e ② nelle parentesi quadre che sono di $O(k^0)$ e trascurare il termine ③ $\propto O(k^2)$

Otteniamo quindi:

$$D(z, k) \simeq iz^3 - z^2 k^2 (\nu_e + j\chi) - iz k^2 c_s^2 + k^4 c_s^2 \chi$$

da cui le radici:

$$\begin{cases} z_0 = -i \chi k^2 \\ z_{\pm} \simeq \pm c_s k - i \Gamma k^2 \\ \text{(ordine } k^2) \end{cases}$$

COEFFICIENTE DI
~~ATTENUAZIONE~~ ATTENUAZIONE SONORA

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[j\chi \left(\frac{\rho-1}{\rho} \right) + \nu_e \right]$$

Come per i modi trasversi, la radice immaginaria è associata ad un modo diffusivo, mentre la coppia di radici complesse coniugate sono associate a modi che si propagano e vengono smorzati (onde sonore).

Quindi RIASSUMENDO: L'IDRODINAMICA LINEARIZZATA PREDICE 2 MODI TRASVERSI PURAMENTE DIFFUSIVI E 3 MODI LONGITUDINALI UNO PURAMENTE DIFFUSIVO E 2 DI TIPO OSCILLATORIO.

Calcoliamo esplicitamente il moto di una fluttuazione di densità $\delta p(r, t)$.

(69)

Dalla equazione matriciale abbiamo che:

$$\tilde{p}_k(z) = \frac{1}{\mathcal{D}(k, z)} \begin{vmatrix} \hat{p}_k(0) & i p_0 k & 0 \\ \hat{v}_k''(0) & (-iz + v_0 k^2) & \frac{i k c_s^2 \alpha_p}{\gamma} \\ \hat{T}_k(0) & \frac{i k c_s^2 \alpha_p p_0}{\gamma c_p} & (-iz + \gamma \chi k^2) \end{vmatrix} =$$

imponiamo che le condizioni iniziali siano le seguenti:

$$\hat{p}_k(0) \neq 0, \quad \hat{v}_k''(0) = \hat{T}_k(0) = 0$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k(z) &= \frac{1}{\mathcal{D}(k, z)} \hat{p}_k(0) \left[(-iz + v_0 k^2)(-iz + \gamma \chi k^2) + k^2 c_s^2 \gamma \frac{\gamma-1}{\gamma} \right] \\ &\approx \hat{p}_k(0) \left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{1}{-iz + \chi k^2} + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{1}{-iz + \Gamma^2 k^2 - i c_s k} + \frac{1}{-iz + \Gamma^2 k^2 + i c_s k} \right) \right] \end{aligned}$$

la trasformata di Laplace inversa dà:

$$\hat{p}_k(t) = \hat{p}_k(0) \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} e^{-\chi k^2 t} + \frac{1}{\gamma} e^{-\Gamma^2 k^2 t} \cos(c_s k t) \right\}$$

vediamo quindi che c'è una componente diffusiva associata con le condizioni termica (χ = diffusività termica) e una parte oscillante (onde sonore) ~~che si muove propaga~~ ~~con velocità~~ di frequenza $\boxed{w_k = c_s k}$ e quindi che si propaga a velocità c_s

RELAZIONE DI
DISPERSIONE DELLE
ONDE SONORE

e de $\hat{e}$ moltiplicate con il coefficiente Γ de
giustifica il suo nome,

