

Esecizi: 3

1. Si consideri la conservazione del tensore energia-momento (EMT) per un sistema:  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Predendo in considerazione il seguente dominio quadrimensionale  $\mathcal{D}$

$$t \in [t_1, t_2], \quad x \in [0, L], \quad y \in [0, L], \quad z \in [0, L];$$

integrando la legge di conservazione del EMT in  $\mathcal{D}$  si derivino esplicitamente le relazioni conseguenti, discutendone l'interpretazione fisica. Si ripeta lo stesso esercizio per il dominio  $\mathcal{D}$

$$t \in [t_1, t_2], \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

2. Si consideri un campo scalare reale. Si mostri esplicitamente che il tensore energia-momento è conservato. Sempre per lo stesso sistema si consideri una configurazione  $\phi = \phi(t)$ , ovvero il campo dipende solo dal tempo; in questo caso si scriva esplicitamente il tensore energia-momento e lo si confronti con quello di un fluido perfetto determinando la densità di energia e la pressione.
3. Si consideri la lagrangiana classica  $\mathcal{L}$  per un campo scalare complesso libero  $\phi$ , ovvero  $\phi^* \neq \phi$ , data da

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi \phi^*).$$

Si trovi la corrente di Noether associata alla simmetria  $U(1)$ ,  $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$ , dove  $\theta$  è un numero reale arbitrario. Si trovino le equazioni del moto classiche e loro soluzione generale; suggerimento: si consideri  $\phi$  e  $\phi^*$  come campi diversi, essendo  $\phi$  complesso. Utilizzando le equazioni del moto si mostri esplicitamente che la corrente della simmetria  $U(1)$  è conservata. Utilizzando il metodo di Noether si trovi il tensore energia-momento e si mostri che è conservato.

4. Con riferimento al problema precedente, si rappresenti il campo complesso in termini di due campi reali  $\phi_{1/2}$  come  $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ . Si esprima la lagrangiana dell'esercizio precedente in termini dei campi  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e si trovino le equazioni del moto. Di quale simmetria gode la lagrangiana dei campi  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ? Si quantizzi il sistema usando la quantizzazione canonica.

5. Si consideri sempre un campo scalare complesso con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi \phi^*) .$$

Si ponga ora  $\phi = \rho(x) e^{iv^{-1}\zeta(x)}$ , dove  $v$  è un numero reale. Si scriva l'azione della simmetria  $U(1)$  sui nuovi campi  $\rho$  e  $\zeta$  e la corrispondente corrente conservata. Infine predendendo  $V = (\phi \phi^* - v^2)^2$ , si scriva  $\mathcal{L}$  in termini dei nuovi campi discutendone la loro natura.