

Esecizi: 4

1. Si consideri la seguente funzione di correlazione per un campo scalare libero reale

$$G_2^{(0)}(x, y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle .$$

Agendo su $G_2^{(0)}$ con l'operatore differenziale $\square$ si trovi l'equazione differenziale che soddisfa $G_2^{(0)}$. Suggerimento, si utilizzi che $\partial_t \theta(t) = \delta(t)$.

2. Si consideri ancora la lagrangiana classica $\mathcal{L}$ per un campo scalare complesso ϕ (ovvero $\phi^* \neq \phi$) data da

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^* - V(\phi \phi^*) .$$

Si provi che la corrente di Noether

$$J^\mu = i (\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \partial^\mu \phi \phi^\dagger)$$

è conservata e la si esprima in termini degli operatori di creazione e distruzione; inoltre si calcolino i seguenti commutatori

$$[\phi, Q] \quad [\phi^\dagger, Q] .$$

3. Sempre il campo scalare complesso libero di calcolino le seguenti funzioni di correlazione (propagatore)

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle , \quad \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2)^\dagger | 0 \rangle .$$

Si interpreti il risultato alla luce della conservazione della carica.

4. Si consideri un campo scalare reale di massa m in presenza di una sorgente esterna descritto dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J \phi .$$

In particolare, si prenda la sorgente classica della forma

$$J(x) = J_1 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_1) + J_2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_2)$$

con J_1 e J_2 costanti reali. A partire dall'espressione esplicita di

$$Z[J] = \langle 0 | \exp \left(\int d^4x \, i\mathcal{L}_{int}(x) \right) | 0 \rangle$$

in termini del propagatore di Feynman ricavata a lezione, scrivendo $Z[J]$ per il caso in questione nella forma $Z[J] = \exp(-i E T)$, si trovi E in termini di $J_{1/2}$ e $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = r$. Si può considerare T come il tempo (molto grande, al limite infinito) in cui la sorgente è accesa; inoltre nel calcolo si possono trascurare i contributi di autointerazione della sorgente proporzionali a J_1^2 e a J_2^2 .

Qual'è l'interpretazione fisica di E ?

Cosa succede nel limite $m \rightarrow 0$?