Esecizi: 1

1. Si scriva l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno in termini della costante di struttura fine α e della massa dell'elettrone usando unità naturali.

2. Quali sono le dimensioni dell'azione per una particella classica libera di massa m ?

3. A partire dalla costante di Newton G, utilizzando $\hbar$ e c si costruiscano degli oggetti che abbiano le dimensioni di un'energia (Planck), massa (Planck), lunghezza (Planck) e tempo (Planck).

4. Mostrare che nel vuoto possiamo scrivere le equazioni di Maxwell nella forma
$$\Box\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,, \qquad \nabla\wedge\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0\,; \tag{1}$$
o alternativamente
$$\Box\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = 0\,, \qquad \nabla\wedge\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0\,. \tag{2}$$
Si consideri il caso (2). Si cerchino delle soluzioni a simmetrica sferica della forma $e^{-i\omega t}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,u_l(r)$ per l'equazione d'onda, ovvero onde sferiche elettromagnetiche. Si scriva l'equazione per $u_l(r)$. Si dimostri poi che se $\mathbf{B}$ soddisfa l'equazione d'onda anche $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ lo farà. Infine si mostri che
$$\mathbf{E} = e^{-i\omega t}\,f_l(kr)\,\mathbf{L}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{ik}\,e^{-i\omega t}\,\nabla\wedge\mathbf{E}\,; \tag{3}$$
è una soluzione delle (2). Si è posto $k = \omega/c$, $L = -i\,\mathbf{r}\wedge\nabla$ è l'operatore momento angolare orbitale ed infine le funzioni f_l, g_l soddisfano l'equazione d'onda radiale trovata in precedenza.