

Esecizi: 3

1. Si consideri la lagrangiana classica \mathcal{L} per un campo scalare complesso libero ϕ , ovvero $\phi^* \neq \phi$, data da

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^* .$$

Si trovi la corrente di Noether associata alla simmetria $U(1)$, $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$, dove θ è un numero reale arbitrario. Si trovino le equazioni del moto classiche e loro soluzione generale; suggerimento: si consideri ϕ e ϕ^* come campi diversi, essendo ϕ complesso. Utilizzando le equazioni del moto si mostri esplicitamente che la corrente della simmetria $U(1)$ è conservata. Utilizzando il metodo di Noether si trovi il tensore energia momento e si mostri che è conservato.

2. Con riferimento al problema precedente, si rappresenti il campo complesso in termini di due campi reali $\phi_{1/2}$ come $\phi = \phi_1 + i \phi_2$. Si esprima la lagrangiana dell'esercizio precedente in termini dei campi ϕ_1 e ϕ_2 e si trovino le equazioni del moto. Di quale simmetria gode la lagrangiana espressa con i campi ϕ_1 e ϕ_2 ? Si quantizzi il sistema usando la quantizzazione canonica. Si ripeta l'esercizio utilizzando direttamente per la quantizzazione il campo ϕ senza decomporlo nella sua parte reale ed immaginaria.