Esecizi: 4

1. Si consideri ancora la lagrangiana classica $\mathcal{L}$ per un campo scalare complesso ϕ (ovvero $\phi^* \neq \phi$) data da
$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi\phi^* - V(\phi\phi^*) \,.$$
Si provi che la corrente di Noether
$$J^\mu = i \left(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \partial^\mu \phi \phi^\dagger \right)$$
è conservata e la si esprima in termini degli operatori di creazione e distruzione; inoltre si calcolino i seguenti commutatori
$$[\phi,\, Q] \qquad [\phi^\dagger,\, Q]\,.$$

2. Sempre il campo scalare complesso libero di calcolino le seguenti funzioni di correlazione (propagatore)
$$< 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0 >\,, \qquad < 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)^\dagger|0 > \;.$$
Si interpreti il risultato alla luce della conservazione della carica.

3. Si consideri la una matrice M_Λ 2x2, con coefficienti complessi e con determinante uno; ovvero $M_\Lambda \in SL(2,\mathbb{C})$. Partendo dalla relazione dimostrata a lezione tra M_Λ ed un generico 4-vettore p^μ
$$M_\Lambda \, \sigma^\mu \, M_\Lambda^\dagger \, p_\mu = \sigma^\mu p'_\mu \,, \qquad p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \, p^\nu \,, \qquad \Lambda \in SO(3,1)\,;$$
si mostri che
$$M_\Lambda^{-1} \, \sigma^\mu \, M_\Lambda^{-1\dagger} = \Lambda^\mu_\nu \sigma^\nu \,.$$
Usando il risultato precedende e le proprietà di trasformazione degli spinori left(right), si mostri che
$$v^\mu = \xi^A \sigma^\mu_{A\dot{B}} \bar{\chi}^{\dot{B}} \equiv \xi \sigma^\mu \bar{\chi} \,,$$
trasforma come un 4-vettore sotto Lorentz. Nello stesso modo si mostri che
$$u^\mu = \bar{\chi}_{\dot{A}} \bar{\sigma}^{\mu\,\dot{A}B} \xi_B \equiv \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi$$
trasforma ancora come un 4-vettore. Si è posto
$$\bar{\sigma}^\mu = \epsilon (\sigma^\mu)^t \epsilon^{-1} = (1_{2x2}, -\vec{\sigma}) \Rightarrow \bar{\sigma}^{\mu\,\dot{A}B} = \bar{\epsilon}^{\dot{A}\dot{B}} \sigma^\mu_{C\dot{B}} \epsilon^{CB} \,.$$