Esercitazione 1: 09/03/2017

Luigi Pilo[a,b]

[a]*Dipartimento di Fisica, Università di L'Aquila, I-67010 L'Aquila, Italy*
[b]*INFN, Laboratori Nazionali del Gran Sasso, I-67010 Assergi, Italy*

luigi.pilo@aquila.infn.it

March 24, 2017

1 Fascio catodico

In un tubo a raggi catodici di un televisore gli elettroni attraversano una regione con moto rettilineo, sottoposti ad una accelerazione costante. Sapendo che la regione è lunga d e che gli elettroni entrano nella regione con velocità v_1 ed escono con velocità v_2, determinare il valore dell'accelerazione a cui sono sottoposti gli elettroni ed il tempo di attraversamento della regione stessa.
(dati del problema $d = 160$ m, $v_1 = 33$ m/s, $v_2 = 40$ m/s)
Soluzione
Il moto è rettilineo e possiamo considerare che si svolga sull'asse x di un sistema Cartesiano. Sceglieremo l'origine coincidente con l'inizio della zona di accelerazione, dai dati del problema dunque compresa tra $x = 0$ e $x = d$. Detto $\hat{\boldsymbol{x}}$ il versore dell'asse x e $\boldsymbol{r}$ il vettore posizione della particella, si ha

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,; \tag{1}$$
$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{2}$$

Indicando con $|\boldsymbol{a}| = a$ e $|\boldsymbol{v}| = v$, essendo a costante, dalla (2) abbiamo integrando

$$\dot{v} = a \Rightarrow v(t) = a\,t + c_0\,; \tag{3}$$

dove c_0 è una costante di integrazione che si può fissare imponendo che al tempo iniziale $t = 0$ la velocità sia v_1; dunque

$$v(0) = v_1 \Rightarrow c_0 = v_1\,. \tag{4}$$

La velocità in funzione del tempo sarà

$$v(t) = a\,t + v_1\,. \tag{5}$$

La relazione (5) si può ulteriormente integrare ottenendo così la legge oraria del moto

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_1\,t + x_0\,;$$

la costante di integrazione x_0 viene fissata essere zero a causa del fatto che $x(0) = 0$ dai dati del problema. Dunque

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_1\,t\,. \tag{6}$$

Le quantità richieste si trovano imponendo che (utilizzando la (6)) al tempo di attraversamento t_a, si abbia $x(t_a) = d$ e che, sempre al tempo t_a (utlizzando la (5)) la velocità sia quella finale v_2. Si ha quindi

$$\begin{cases} v_2 = a\,t_a + v_1 \\ d = \frac{a\,t_a^2}{2} + v_1\,t_a\,. \end{cases}$$

Risolvendo per t_a ed a, dopo semplice passaggi si ottiene

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d} = 8.01 \times 10^{14}\,\frac{m}{s^2}\,, \qquad t_a = \frac{2\,d}{v_2 + v_1} = 1.1 \times 10^{-8}\,s\,; \tag{7}$$

che è quanto richiesto.
È buona pratica verificare sempre che tutte le relazioni che si scrivono abbiamo le dimensioni corrette. Ad esempio, verificare che nella (7) a abbia le dimensioni di un'accelerazione: l/t^2 e che t_a quelle di un tempo.

2 Rally

In un tratto speciale di un rally automobilistico un pilota deve percorrere nel tempo minimo un tratto di lunghezza d, partendo e arrivando da fermo. Le caratteristiche dell'auto sono tali che l'accelerazione massima vale a_{max}, mentre in frenata la decelerazione massima vale a_{min}. Supponendo che il moto sia rettilineo, determinare il rapporto tra il tempo di decelerazione ed accelerazione, e la velocità massima raggiunta.
(dati del problema $d = 500$ m, $a_{max} = 2\ m/s^2$, $a_{min} = -3\ m/s^2$)
Soluzione
Il problema è simile a quello precedente, questa volta però sono presenti due zone, una di accelerazione ed una di decelerazione. Indichiamo con t_a e t_d l'intervallo di tempo in cui l'auto rispettivamente accelera e decelera e con $t = 0$ l'istante iniziale, scegliendo inoltre l'origine dell'asse x in corrIspodenza del punto iniziale della prova speciale. Dunque detta $x(t)$ la posizione dell'auto all'istante t, abbiamo che $x(0) = 0$. Trascurando il tempo che l'auto impiega ad accelerare alla sua massima accelerazione costante a_{max} e decelerare al sua alla migliore decelerazione a_{min}, possiamo scrivere per l'andamento dell'accelerazione con il tempo

$$a(t) = \begin{cases} a_{max} & 0 \leq t \leq t_a \\ a_{min} & t > t_a\,. \end{cases} \tag{8}$$

Integrando la (8) si ha

$$v(t) = \begin{cases} a_{max}\, t + v_0 & 0 \leq t \leq t_a \\ a_{min}\, t + v_1 & t \geq t_a\,. \end{cases}$$

Le due costanti di integrazione v_0 e v_1 si determinano imponendo che secondo i dati del problema l'auto parta da ferma e dunque

$$v(0) = 0 \Rightarrow v_0 = 0\,;$$

e che alla fine della speciale, al tempo $t_a + t_d$ (tempo di accelerazione + tempo di decelerazione), la velocità finale sia ancora nulla; dunque utlizzando l'espressione della velocità per $t > t_a$

$$v(t_a + t_d) = 0 \Rightarrow v_1 = t_a(a_{max} - a_{min})\,.$$

Si arriva così alla seguente espressione per la velocità

$$v(t) = \begin{cases} a_{max}\, t & 0 \leq t \leq t_a \\ a_{min}\, t + t_a(a_{max} - a_{min}) & t \geq t_a\,. \end{cases} \tag{9}$$

Si noti come, mentre $a(t)$ a causa dell'approssimazione fatta è discontinua in t_a, $v(t)$ è una funzione continua nel tempo e che assume il suo valore massimo all'istante t_a. Il tempo di decelerazione, in funzione di t_a, si determina imponendo che alla fine della speciale, al tempo $t_a + t_d$, si abbia che l'auto è ferma, dunque $v(t_a + t_d) = 0$; dalla (9) quando $t > t_a$, si ha

$$v(t_a + t_d) = 0 \Rightarrow a_{min}(t_a + t_d) + t_a(a_{max} - a_{min}) = 0\,;$$

da cui

$$\frac{t_d}{t_a} = R = -\frac{a_{max}}{a_{min}} = \frac{2}{3} \qquad ; \tag{10}$$

che risponde alla prima domanda. Si noti come essendo $a_{min} < 0$, $R > 0$ come deve essere. Il tempo di di decelerazione si può determinare integrando la (9) e pervenendo dunque alla legge oraria; abbiamo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}\, t^2}{2} + x_0 & 0 \le t \le t_a \\ \frac{a_{min}\, t^2}{2} + t_a(a_{max} - a_{min})t + x_1 & t \ge t_a \,. \end{cases} \tag{11}$$

Le due costanti di integrazione si determinano imponendo che $x(0) = 0$

$$x(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0\,;$$

e che la posizione dell'auto vari con continuità in funzione del tempo, dunque $x(t_d^-) = x(t_d^+)$, ovvero

$$x(t_d^-) = x(t_d^+) \Rightarrow \frac{a_{max}\, t_a^2}{2} = \frac{a_{min}\, t_a^2}{2} + t_a^2(a_{max} - a_{min}) + x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{t_a^2}{2}(a_{min} - a_{max})\,.$$

La legge oraria sarà

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a_{max}\, t^2}{2} & 0 \le t \le t_a \\ \frac{a_{min}\, t^2}{2} + t_a(a_{max} - a_{min})t + \frac{t_a^2}{2}(a_{min} - a_{max}) & t \ge t_a \,. \end{cases} \tag{12}$$

Il tempo di decelerazione si determina imponendo che alla fine della speciale, al tempo $t_a + t_d$, l'auto abbia percorso la distanza d; ovvero utilizzando la (12)

$$x(t_a + t_d) = d \Rightarrow d = \frac{a_{min}\,(t_a + t_d)^2}{2} + t_a(a_{max} - a_{min})(t_a + t_d) + \frac{t_a^2}{2}(a_{min} - a_{max})\,. \tag{13}$$

La relazione precedente si può risolvere per t_d, una volta che si si sia espresso t_a in termini di t_d attraverso la (10), ovvero

$$t_a = -\frac{a_{min}}{a_{max}}\, t_d \equiv \mathcal{R}\, t_d = \frac{3}{2}\, t_d\,;$$

dunque la (13) diventa una semplice equazione quadratica per il tempo di decelerazione t_d

$$a_{min}\, t_d^2 + 2\,\mathcal{R}\, t_d^2\, a_{max} + \mathcal{R}^2\, a_{max} = 2\,d\,.$$

Si ottiene così

$$t_d = \left[\frac{2\,d}{a_{min} + (2\,\mathcal{R} + \mathcal{R}^2)\;a_{max}}\right]^{1/2} = 11.5\,s\,.$$

Si noti come l'accelerazione come funzione del tempo sia discontinua, mentre la velocità è continua.

3 Forza dipendente dalla velocità

Una particella si muove lungo una retta con accelerazione della forma

$$a = -\gamma\, v\,; \tag{14}$$

con γ costante. Data la posizione iniziale x_0 e la velocità iniziale v_0 al tempo $t = 0$, si determini la legge oraria.

Soluzione

La costante γ ha le dimensioni di t^{-1}. Utlizzando $a = \ddot{x}$ e $v = \dot{x}$, la (14) si scrive come

$$\ddot{x} = -\gamma\,\dot{x}\,. \tag{15}$$

Ricordando che, data $f(t)$, si ha

$$\frac{d}{dt}\log(f) = \frac{\dot{f}}{f}\,;$$

possiamo scrivere la (14) come

$$\frac{d}{dt}\log(\dot{x}) = -\gamma\,,$$

che può essere facilmente integrata

$$\log(\dot{x}) = -\gamma\,t + c_0 \Rightarrow \dot{x} = e^{-\gamma\,t + c_0} = A\,e^{-\gamma\,t}\,;$$

dove $A = e^{c_0}$ è una costante di integrazione. Integrando ancora possiamo trovare $x(t)$

$$x(t) = B - \frac{A}{\gamma}e^{-\gamma\,t}\,;$$

con B costante di integrazione. Imponendo le condizioni iniziali possiamo determinare A e B; infatti

$$x(0) = x_0 = B - \frac{A}{\gamma}\,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 = A\,;$$

da cui

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma\,t}\right)\,.$$

4 Moto ellittico

Le equazioni parametriche di un punto materiale, che descrive una ellisse intorno all'origine, sono:

$$\begin{cases} x(t) = a\,\sin(\omega\,t) \\ y(t) = b\,cos(\omega\,t) \end{cases}\,. \tag{16}$$

Determinare, quando si è fatto un quarto di giro a partire dall'istante iniziale, quale sia la distanza dal centro, la velocità e l'accelerazione in modulo del punto materiale.
(dati del problema $a = 2$m , $b = 3$m , $\omega = 0.2$ rad/s).
Soluzione
Il vettore posizione del punto materiale si può scrivere come

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}\,x(t) + \hat{\boldsymbol{y}}\,y(t)\,;$$

con $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ versori dell'asse x e y. Si noti come le dimensioni di ω sono $1/t$ e dunque gli argomenti del sin e cos sono adimensionali. Il moto è ellittico in quanto la traiettoria è un ellisse, come si ottiene immediatamente eliminando t:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Le funzioni seno e coseno hanno periodo 2π e dunque il periodo del moto è $T = 2\pi/\omega$, ne segue che il tempo $\bar{t}$ necesario per percorrere un quarto del'orbita completa sarà

$$\bar{t} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\,\omega} \Rightarrow \omega\,\bar{t} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Al tempo $t = 0$, $\boldsymbol{r}(0) = \hat{\boldsymbol{y}}\, b$ e dunque la distanza dall'origine sarà $|\boldsymbol{r}(0)| = b$. In generale, velocità e accelerazione si ottengono derivando il vettore posizione; tenendo conto che i versori sono vettori costanti, si ha

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}}\, \dot{x}(t) + \hat{\boldsymbol{y}}\, \dot{y}(t) = \omega\, [\hat{\boldsymbol{x}}\, \cos(\omega\, t) - \hat{\boldsymbol{y}}\, \sin(\omega\, t)] \ ; \\
&\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = -\omega^2\, \boldsymbol{r} \, .
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}(\bar{t}) = \hat{\boldsymbol{x}}\, a\, \sin(\frac{\pi}{2}) + \hat{\boldsymbol{y}}\, b\, \cos(\frac{\pi}{2}) = \hat{\boldsymbol{x}}\, a\, \sin(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow |\boldsymbol{r}(\bar{t})| = a\, ; \\
&\boldsymbol{v}(\bar{t}) = -\omega\, \hat{\boldsymbol{y}}\, b\, \sin(\frac{\pi}{2}) = -\omega\, b\, \hat{\boldsymbol{y}} \Rightarrow |\boldsymbol{v}(\bar{t})| = \omega\, b\, ; \\
&\boldsymbol{a}(\bar{t}) = -\omega^2\, \boldsymbol{r}(\bar{t}) = -\omega^2 \hat{\boldsymbol{x}}\, a \Rightarrow |\boldsymbol{a}(\bar{t})| = \omega^2\, a\, ;
\end{aligned}$$

che è quanto richiesto.