Esercitazione 2: 16/03/2017

Luigi Pilo[a,b]

[a] *Dipartimento di Fisica, Università di L'Aquila, I-67010 L'Aquila, Italy*
[b] *INFN, Laboratori Nazionali del Gran Sasso, I-67010 Assergi, Italy*

`luigi.pilo@aquila.infn.it`

March 25, 2017

1 Macchina in curva

Una macchina procede alla velocitaà v_0, l'attrito radente statico tra le ruote e l'asfalto vale μ_s.

1. Determinare il raggio di curvatura della curva più stretta che riesce ad affrontare l'auto senza slittare.
2. Se l'attrito a causa del fondo sdrucciolevole diminuisce di tre volte, a che velocità deve affrontare la curva minima calcolata al punto 1 ?

Dati del problema $v_0 = 110$ km/h, $\mu_s = .9$.
Soluzione
Nel tratto di moto circolare uniforme (curva) l'accelerazione è diversa da zero; le uniche forze che agiscono sull'auto sono la forza di gravità $m\,\boldsymbol{g}$ e la reazione dell'asfalto $\boldsymbol{R}$, dunque si ha

$$m\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}\,;$$

dove m è la massa dell'auto. Il moto si svolge lungo il piano dell'asfalto che contiene la curva; dunque la proiezione lungo l'asse z ortogonale allo stesso piano conduce a

$$m\,a_z = 0 = -m\,g + R_z \Rightarrow R_z = m\,g\,. \tag{1}$$

Lungo il piano l'accelerazione è quella centripeta causata dalla componente della reazione R_p sul piano, che secondo la legge dell'attrito vale

$$R_p = \mu_s\,R_z = \mu_s\,m\,g\,. \tag{2}$$

Essendo il moto circolare si ha per l'accelerazione dell'auto

$$a = \frac{v_0^2}{r} = \mu_s\,g\,; \tag{3}$$

dove r è il raggio della curva e a è il modulo dell'accelerazione dell'auto. Ne segue

$$r = \frac{v_0^2}{g\,\mu_s} = 87\,m\,. \tag{4}$$

Sia ora $\mu_s' = \mu_s/3$ il nuovo coefficiente di attrito statico, la massima velocità v con cui si potrà percorere la curva di raggio R calcolato in precedenza è data dalla relazione

$$\frac{v^2}{r} = g\,\mu_s' = \frac{g\,\mu_s}{3} \Rightarrow v = \left[\frac{r\,\mu_s\,g}{3}\right]^{1/2} = 57.6\,\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}}\,. \tag{5}$$

2 Piano inclinato e tratto piano

Un punto materiale di massa m scende lungo un piano inclinato con angolo α rispetto al piano orizzontale. Alla fine del piano scabro incontra un tratto orizzontale scabro di pari lunghezza. Determinare il massimo coefficiente di attrito dinamico μ tale che il punto possa raggiungere la fine del tratto orizzontale.
Dati del problema $\alpha = 60°$.
Soluzione
Le forze in gioco sono la forza di gravità e la reazione vincolare del piano. Facendo riferimento alla figura, proiettando la seconda legge di Newton $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ lungo il versore $\boldsymbol{n}$ ortogonale al piano inclinato si ottiene immediatamente

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n} = m\,g\,\cos\alpha\,.$$

Proiettando la stessa relazione vettoriale lungo un versore $\boldsymbol{\ell}$ parallelo al piano inclinato abbiamo che la forza di attrito si manifesta come la componente di $\boldsymbol{R}$ lungo il piano che vale $\boldsymbol{R}\cdot\ell = -\mu\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n} = -\mu\,m\,g\,\cos\alpha$. Dunque, posto $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\ell} = a$, la seconda legge di Newton proiettata lungo il versore $\boldsymbol{\ell}$ diventa

$$m\,a = m\,g\,(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha) \quad \Rightarrow a = g\,(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha)\,. \tag{6}$$

Dunque, il moto lungo il piano inclinato è uniformemente accelerato con accelerazione a. Chiamando $s(t)$ la posizione del punto materiale lungo il piano inclinato al tempo, scegliendo l'origine in modo che si corrisponda all'estremità superiore dello stesso, abbiamo le seguneti condizioni iniziali

$$s(0) = 0 \qquad\qquad \dot{s}(0) = v(0) = 0\,.$$

Integrando la (6) con le precedenti condizioni iniziali otteniamo

$$\dot{s}(t) = v(t) = a\,t\,, \qquad\qquad s(t) = \frac{1}{2}a\,t^2\,.$$

Se L è la lunghezza del tratto inclinato, questo verrà percorso dal punto materiale nel tempo t_D dato da

$$L = \frac{1}{2}a\,t_D^2 \Rightarrow t_D = \left(\frac{2\,L}{a}\right)^{1/2}\,. \tag{7}$$

La velocità alla fine del tratto inclinato sarà

$$\bar{v} = v(t_D) = a\,t_D = \left(\frac{2\,L}{a}\right)^{1/2} a = (2\,L\,a)^{1/2}\,. \tag{8}$$

Procedendo come sopra (basta porre $\alpha = 0$), abbiamo che il tratto piano viene percorso con un accelerazione costante data da $\tilde{a} = -\mu\,g$. Sia $x(t)$ la posizione del punto materiale al tempo t, scegliendo l'origine all'inizio del tratto piano e integrando rispetto al tempo abbiamo

$$\dot{x}(t) = -\,\mu\,g\,t + a\,t_D\,; \tag{9}$$

dove abbiamo usato che il tratto piano inizia con velocità $\dot{x}(0) = a\,t_D$. Il punto materiale si ferma dopo un tempo t_A dato da

$$\dot{x}(t_A) = 0 \Rightarrow t_A = \frac{a\,t_D}{\mu\,g}\,. \tag{10}$$

La distanza percorsa si ottiene integrando la (9), con la condizione iniziale $x(0) = 0$, ottendo

$$x(t) = -\frac{\mu\,g\,t^2}{2} + a\,t_D\,t\,. \tag{11}$$

La distanza percorsa D dal puto materiale nel tratto piano prima di fermarsi sarà

$$D = x(t_A) = -\frac{\mu\, g\, t_A^2}{2} + a\, t_D\, t_A = \frac{1}{2}\frac{a^2\, t_D^2}{\mu\, g}\,. \tag{12}$$

Il valore del coefficiente di attrito che soddisfa la domanda si ottiene imponendo che la distanza L percorsa nel tratto inclinato sia uguale a quella nel tratto piano D; dunque

$$L = D \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{a^2\, t_D^2}{\mu\, g} = L \Rightarrow \frac{a}{\mu\, g} = 1\,;$$

ovvero

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}\,;$$

da cui utlizzando il valore di α si ha $\mu = 1/\sqrt{3} = 0.578$.

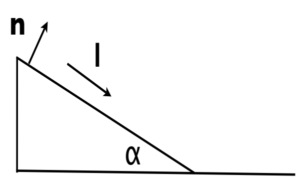

Figure 1: