Esercitazione 3: 23/03/2017

Luigi Pilo[a,b]

[a]*Dipartimento di Fisica, Università di L'Aquila, I-67010 L'Aquila, Italy*
[b]*INFN, Laboratori Nazionali del Gran Sasso, I-67010 Assergi, Italy*

luigi.pilo@aquila.infn.it

March 27, 2017

1 Piastra con sopra oggetto

Su un piano orizzontale è appoggiata una piastra quadrata di massa m_2, ferma. Il coefficiente di attrito radente piastra-piano vale μ_2. Sulla piastra viene posto un corpo di massa m_1, schematizzabile come un punto materiale che si muove con velocità iniziale parallela ai lati della piastra il cui modulo vale v_0. Il coefficiente di attrito corpo-piastra vale μ_1 .

1. Quale relazione deve esistere tra m_1, m_2, μ_1 e μ_2 perchè la piastra si muova?
2. Tovare la distanza L_1 percorsa dal corpo sulla piastra prima di fermarsi.
3. Tovare la distanza L_2 percorsa dalla piastra sul piano prima di fermarsi.

Dati del problema $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.3$, $m_1 = 2$ Kg, $m_2 = 3$ Kg, $v_0 = 3$ m/h.
Soluzione
Le forze che agiscono sono la gravità e la reazione vincolare $\boldsymbol{R}_1$ esercitata sul corpo e quella $\boldsymbol{R}_2$ esercitata dal piano sulla piastra; inoltre per il principio di azione e reazione il corpo esercita sulla piastra una forza $-\boldsymbol{R}_1$. Dunque la seconda legge della dinamica per il corpo e per la piastra si scrive come

$$\begin{aligned} m_1\,\boldsymbol{a}_1 &= m_1\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_1\,; \\ m_2\,\boldsymbol{a}_2 &= m_2\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Scegliamo un sistema di assi cartesiano xyz in modo che z sia ortogonale al piano, x sia parallelo ai lati della piastra e l'origine coincida con la posizione iniziale della piastra e dell'oggetto. Secondo il problema il moto avviene solo lungo x; ne segue che proiettando (2) lungo z abbiamo

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{z} = 0 \Rightarrow -m_1\,g + R_{1z} = 0 \Rightarrow R_{1z} = m_1\,g \\ &\boldsymbol{a}_2 \cdot z = 0 \Rightarrow -m_2\,g + R_{2z} + R_{1z}\,; \end{aligned} \tag{2}$$

da cui

$$R_{1z} = m_1\,g\,, \qquad\qquad R_{2z} = (m_1 + m_2)\,g\,.$$

Essendo le superfici scabre, la componente x delle reazioni vincolari è diversa da zero; utilizzando la legge empirica dell'attrito abbiamo che

$$R_{1x} = -\mu_1 R_{1z} = -\mu_1\,m_1\,g\,, \qquad\qquad R_{2x} = -\mu_2 R_{2z} = -\mu_2(m_1 + m_2)\,g\,.$$

Indicando con $\boldsymbol{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = a_1$ e $\boldsymbol{a}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = a_2$ otteniamo dalla (2)

$$\begin{aligned} &m_1\,\ddot{x}_1 = m_1\,a_1 = -\mu_1\,m_1\,g \quad \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\mu_1\,g \equiv a_1\,; \\ &m_2\,\ddot{x}_2 = m_2\,a_2 = -\mu_2\,g(m_1 + m_2) + \mu_1\,m_1\,g \equiv a_2 \quad \Rightarrow \ddot{x}_2 = g\,\left[\alpha(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2\right] \equiv a_2\,; \end{aligned} \tag{3}$$

dove $\alpha = m_1/m_2$. Numericamente abbiamo $a_1 = -5.89\,\frac{m}{s^2}$ e $a_2 = 0.65\,\frac{m}{s^2}$. Notiamo come affinchè la piastra si muova, la forza dovuta la corpo dovrà essere maggiore dell'attrito statico, ovvero

$$\mu_1\,g > \mu_{2s}(m_1 + m_2)\,g > \mu_2(m_1 + m_2)\,g \Rightarrow \mu_1 > \mu_2(1 + \alpha)\,;$$

dove $\mu_{2s} > \mu_2$ è il coefficiente di attrito statico tra la piatra ed il piano. La relazione è soddisfatta con i valori numerici del problema. Le equazioni del moto si possono integrare con le seguenti condizioni iniziali: $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = a_1\,t + v_0 \qquad\qquad x_1(t) = \frac{1}{2}\,a_1\,t^2 + v_0\,t\,; \\ &\dot{x}_2(t) = a_2\,t \qquad\qquad\qquad x_2(t) = \frac{1}{2}\,a_2\,t^2\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Sia la piastra che il corpo sono entrambi in moto rispetto ad un osservatore fisso. Poichè la prima domanda si riferisce alla distanza percorsa dal corpo sulla piastra, è necessario determinare l'istante $\bar{t}$ in cui termina il loro moto relativo, ovvero quando hanno la stessa velocità;

$$\dot{x_1}(\bar{t}) = \dot{x_2}(\bar{t}) \Rightarrow a_1\,\bar{t} + v_0 = a_2\,\bar{t} \Rightarrow \bar{t} = \frac{v_0}{a_2 - a_1} = \frac{v_0}{(1+\alpha)(\mu_1 - \mu_2)g} = 0.46\,s\,.$$

La distanza percorsa dal corpo sulla piastra prima di fermarsi si ottiene sottraendo alla distanza percorsa dal corpo $x_1(\bar{t})$ la distanza percorsa dalla piastra $x_2(\bar{t})$; così

$$L_1 = x_1(\bar{t}) - x_2(\bar{t}) = \frac{v_0^2}{2(1+\alpha)(\mu_1 - \mu_2)g} = 0.69\,m\,.$$

Si noti come

$$d_1 = x_1(\bar{t}) = \frac{v_0^2\,[2\alpha\mu_1 - 2(\alpha+1)\mu_2 + \mu_1]}{2(\alpha+1)^2 g\,(\mu_1 - \mu_2)^{\,2}} = 0.76\,m\,;$$
$$d_2 = x_2(\bar{t}) = \frac{v_0^2\,[\alpha\mu_1 - (\alpha+1)\mu_2]}{2(\alpha+1)^2 g\,(\mu_1 - \mu_2)^{\,2}} = 0.07\,m\,.$$

Una volta terminato il moto relativo corpo-piastra, il sistema corpo-piastra di massa $m_1 + m_2$ prosegue il suo moto con velocità e posizione iniziale

$$\dot{x_1}(\bar{t}) = \dot{x_2}(\bar{t}) = \bar{v} = a_2\,\bar{t} = v_0\,\frac{\alpha(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2}{(1+\alpha)(\mu_1 - \mu_2)} = 0.3\,, m/s\,;$$
$$x_2(\bar{t}) = d_2\,;$$

e accelerazione a dovuta all'attrito tra piano e piastra; procedendo come prima, si ha che, indicando con $x(t)$ la posizione del sistema al tempo t

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} = -\mu_2\,g(m_1 + m_2) \Rightarrow \ddot{x} = a = -\mu_2\,g = -1.06\,m/s^2\,.$$

Da cui abbiamo

$$\dot{x}(t) = a\,(t - \bar{t}) + \bar{v}\,, \qquad x(t) = \frac{1}{2}\,a\,(t - \bar{t})^2 + \bar{v}\,(t - \bar{t}) + x_2(\bar{t})\,.$$

Il sistema si ferma al tempo t_s definito da

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Rightarrow (t_s - \bar{t})a + \bar{v} = 0 \Rightarrow (t_s - \bar{t}) = \frac{\alpha(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2}{(1+\alpha)(\mu_1 - \mu_2)\mu_2\,g} = 0.15\,s\,.$$

Dunque la distanza L_2 percorsa dalla piastra prima di fermarsi sarà

$$d_2 = x(t_s) = \frac{1}{2}\,a\,(t_s - \bar{t})^2 + \bar{v}\,(t_s - \bar{t}) + x_2(\bar{t}) = 0.093\,m\,.$$