

# Appello Straordinario AC 2016-2017

## Esercizio I

Si consideri la seguente funzione  $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1) \sin(z)}.$$

1. Si determini la natura della singolarità di  $f$  in  $z = 0$ .
2. Nel caso si tratti di una singolarità non essenziale, si determini il residuo in  $z = 0$ .

## Esercizio II

Determinare per  $t > 0$  la seguente funzione

$$f(t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2(x)}{t x^2 - 1}.$$

# I Parziale AC 2016-2017

## Esercizio 1

Si consideri il luogo geometrico  $\mathcal{P}$  ottenuto unendo nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$z^6 - 1 = 0.$$

Trovare l'immagine di  $\mathcal{P}$  sotto la trasformazione

$$z \rightarrow w = z(1+i).$$

## Esercizio 2

Si studi il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, determinando la natura delle eventuali singolarità

$$f_1(z) = \frac{(z+i)}{(z^2+1)}, \quad f_2(z) = \exp\left[\frac{1}{(z+i)}\right], \quad f_3(z) = \text{Log}(z^2+1),$$
$$f_4(z) = \frac{1}{\sin(z)^2}$$

## Esercizio 3

Si determini l'espansione in serie di Taylor-Laurent delle seguenti funzioni:

$$f_1(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^3}, \quad |z| > 0;$$
$$f_2(z) = \frac{1}{z^2+2}, \quad a) |z| < 1, \quad b) |z| > 1.$$

## Esercizio 4

Si calcolino i seguenti integrali nel piano complesso

$$\oint_C \frac{dz}{(z-i)(z+3^{-1/2})}, \quad C = \left\{ z = \frac{2^{1/2} \cos t}{\sqrt{3}} + i \frac{\sin t}{\sqrt{18}}, \ 0 \leq t \leq 2\pi \right\};$$

$$\oint_C dz \frac{\sin(z^2)}{\pi z^3}, \quad C = \{z = e^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\};$$

$$\oint_C dz \frac{\log(1+z)}{z^2}, \quad C = \{z = \frac{1}{2} e^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad \textbf{facoltativo}.$$

## Secondo Parziale AC 2016-2017

### Esercizio 1

Sia

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2 e^{ikx}}{(x^2 + b^2)^2}, \quad b > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- a) Mostrare che  $F(k) \sim o(1/k^2)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ .
- b) Trovare la forma esplicita di  $F$  utilizzando l'integrazione complessa e la sua espansione asintotica per  $k \rightarrow +\infty$ , verificando il punto a).

### Esercizio 2

Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x(t) = 0, \quad a > 0.$$

Determinare la funzione di Green relativa nei seguenti casi:

- a) Funzione di Green ritardata.
- b) Funzione di Green definita attraverso la sua trasformata di Fourier come

$$G(t, t') = PP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{G}(\omega).$$

### Esercizio 3

Si trovi la soluzione generale  $u(x)$  regolare in  $x = 0$  della seguente equazione differenziale

$$x u'' + (1 - x) u' + 3u = 0.$$

# Prova Scritta del 14/06/2017

## Esercizio 1

Sia

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2 e^{ikx}}{(x^2 + b^2)^2}, \quad b > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- a) Mostrare che  $F(k) \sim o(1/k^2)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ .
- b) Trovare la forma esplicita di  $F$  utilizzando l'integrazione complessa e la sua espansione asintotica per  $k \rightarrow +\infty$ , verificando il punto a).

## Esercizio 2

Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x(t) = 0, \quad a > 0.$$

Determinare la funzione di Green relativa nei seguenti casi:

- a) Funzione di Green ritardata.
- b) Funzione di Green definita attraverso la sua trasformata di Fourier come

$$G(t, t') = PP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{G}(\omega).$$

## Esercizio 3

Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{z^3}{(\log z)^2 + \frac{\pi^2}{16}}.$$

Inoltre si calcoli

$$I = \oint_C dz f(z), \quad C = \{z - 1 = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

per tutte le determinazioni di  $\log z$ .

**Scritto 24-06-2017**

**Esercizio 1**

Nel piano complesso esteso studiare il dominio di analiticità della seguente funzione  $f(z)$

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(1+z)^3} + \frac{(z+3)}{(3z^2 - 6z - 9)}.$$

Trovare inoltre l'espansione in serie di Laurent di  $f$  attorno al punto  $z = 1$ , valutandone la regione di convergenza.

**Esercizio 2**

Calcolare, utilizzando l'integrazione in campo complesso, il seguente integrale

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{(t x^2 - 1)} dx \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 3**

Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{z^3}{(\log z)^2 + \frac{\pi^2}{16}}.$$

Inoltre si calcoli

$$I = \oint_C f(z) dz, \quad C = \{z - 1 = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

per tutte le determinazioni di  $\log z$ .

# Prova Scritta del 14/07/2017

## Esercizio 1

Nel piano complesso esteso studiare il dominio di analiticità della seguente funzione  $f(z)$

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(1+z)^4} + \frac{(z-3)}{2(3z^2-6z-9)}$$

Trovare inoltre l'espansione in serie di Laurent di  $f$  attorno al punto  $z = -1$  valutandone la regione di convergenza. Infine si calcoli

$$\oint_{C_{-1}} f(z) dz$$

dove  $C_{-1}$  è la circonferenza di raggio unitario e centro in  $z = -1$ .

## Esercizio 2

Utilizzando l'integrazione in campo complesso, calcolare il seguente integrale

$$g(t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(t x^2 - 1)} dx \quad t \in \mathbb{R}$$

## Esercizio 3

Si consideri la curva  $\gamma$  orientata in senso positivo formata unendo i punti del piano complesso che soddisfano la seguente equazione algebrica

$$(z-1)^4 = 1.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \oint_{\gamma} \frac{6(z^4 + \sqrt{3}z)}{[36 \log^2(z) + \pi^2]} dz \quad .$$

per tutte le determinazioni di  $\log z$ .

## I Parziale 13-04-2018

1. Si studi il dominio di analiticità e la natura delle eventuali singolarità delle seguenti funzioni:

$$f_1(z) = (1 + z^2)^z, \quad f_2 = \frac{z^3 - i z^2 - z + i}{z + 1},$$

$$f_3(z) = \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z}.$$

Nel caso di funzioni polidrome, si indichi una possibile scelta su come tagliare il piano complesso per ottenere un ramo monodromo.

2. Si determini la serie di Taylor-Laurent delle seguenti funzioni

$$f_1(z) = \arctan(z) \quad \text{attorno } z = 0 \quad \text{con relativo dominio di convergenza};$$

$$f_2(z) = \frac{4 + z}{z^3 + 2z} \quad 0 < |z| < 2 \quad \text{e} \quad |z| > 2.$$

3. Si calcolino i seguenti integrali

$$\oint_C \frac{(e^{z^2} - 1)}{z} dz, \quad C \text{ bordo di un triangolo equilatero di lato unitario e centro in } z = 0;$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)}, \quad C \text{ circonferenza di raggio 3 con centro nell'origine.}$$

4. Si consideri l'applicazione

$$z \rightarrow w = i \frac{(1-z)}{(1+z)};$$

Si dica in quali punti l'applicazione è conforme. Posto poi  $z = x + i y$  e  $w = u + i v$  determinare  $u$  e  $v$ . Verificare che l'applicazione manda il disco  $x^2 + y^2 \leq 1$  nel semipiano complesso superiore corrispondente alla variabile  $w$ .



## II Parziale 18-06/2018

### Esercizio 1

Utilizzando l'integrazione complessa si calcoli il seguente integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin(\theta)^2}{(\sqrt{2} + \cos \theta)}.$$

### Esercizio 2

Si consideri l'operatore differenziale

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

associato alla seguente equazione alle derivate parziali

$$\mathcal{D}\phi(t, x) = 0.$$

Determinare la funzione di Green  $G$  avanzata del sistema utilizzando la sua rappresentazione tramite antitrasformata/trasformata di Fourier

$$G(t - t', x - x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-i\omega t + ikx} \hat{G}(\omega, k);$$
$$\hat{G}(\omega, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\omega t - ikx} G(t - t', x - x').$$

### Esercizio 3

Utilizzando il metodo di soluzione per serie si risolva la seguente equazione differenziale per  $y(z)$

$$(z - 1) z y'' + \left( \frac{3}{2} - 4z \right) y' + \frac{9}{4} y = 0;$$

utilizzando il punto  $z = 0$  per l'espansione in serie di potenze.

### Esercizio 4

In  $\mathbb{R}^3$  si considerino le seguenti 1-forme espresse in una base coordinata cartesiana  $(x, y, z)$   $\boldsymbol{\omega} = x \, d\mathbf{y}$  e  $\boldsymbol{\Omega} = y \, d\mathbf{z}$ . Calcolare la seguente derivata esterna  $d(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega})$ .

### Formule potenzialmente utili

Residuo per un polo di ordine  $n$  in  $z_0$  di una funzione  $f$ :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

## Scritto 18-06/2018

### Esercizio 1

Utilizzando l'integrazione complessa si calcoli il seguente integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin(\theta)^2}{(\sqrt{2} + \cos \theta)}.$$

### Esercizio 2

Si consideri l'operatore differenziale

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

associato alla seguente equazione alle derivate parziali

$$\mathcal{D}\phi(t, x) = 0.$$

Determinare la funzione di Green  $G$  avanzata del sistema utilizzando la sua rappresentazione tramite antitrasformata/trasformata di Fourier

$$G(t - t', x - x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-i\omega t + ikx} \hat{G}(\omega, k);$$
$$\hat{G}(\omega, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\omega t - ikx} G(t - t', x - x').$$

### Esercizio 3

Utilizzando il metodo di soluzione per serie si risolva la seguente equazione differenziale per  $y(z)$

$$(z - 1) z y'' + \left( \frac{3}{2} - 4z \right) y' + \frac{9}{4} y = 0;$$

utilizzando il punto  $z = 0$  per l'espansione in serie di potenze.

### **Esercizio 4**

Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, discutendo la natura delle eventuali singolarità

1.  $g_1(z) = (z^2 + 2)^z$  ;

2.  $g_2(z) = \frac{\cosh[\cos(z)]}{z^2+3}$

### **Formule potenzialmente utili**

Residuo per un polo di ordine  $n$  in  $z_0$ :

$$\text{Res} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

# Scritto 09-07-2018

## Esercizio 1

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{i\sqrt{2} + z}{i\sqrt{2} - z} \right)^n.$$

Determinare il dominio di convergenza della serie e la sua somma.

## Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor-Laurent nel punto  $z = 0$  nelle regioni  $0 < |z| < 1$  e  $1 < |z| < \infty$  la funzione

$$f(z) = \frac{1}{[z(1-z)]^2}.$$

## Esercizio 3

Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{g(x)}$$

utilizzando l'integrazione complessa. Dell'estensione  $g(z)$  sul piano complesso di  $g(x)$  è noto che le sole singolarità sono

1. un polo di ordine 3 all'infinito;
2. un polo semplice in  $z = 0$  di residuo 1;

dunque  $g(z)$  è meromorfa. Inoltre  $g$  ha due soli zeri di uguale molteplicità in  $z = \pm i$ .

**Suggerimento:** Seguendo le indicazioni date, determinare la più generale  $g$  che ha le proprietà richieste e poi procedere al calcolo di  $I$ .

## Esercizio 4

Utilizzando l'integrazione complessa calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx.$$

## Scritto 30-07-2018

### Esercizio 1

Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} dx \frac{\sin(x)^2}{x^2}$$

utilizzando l'integrazione complessa.

### Esercizio 2

Si consideri la funzione complessa  $f(z)$  definita tramite l'integrale

$$f(z) = \int_0^z ds e^{as^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Determinare l'espansione in serie di potenze di  $f$  attorno a  $z = 0$  ed il raggio di convergenza della serie.

### Esercizio 3

Utilizzando il metodo di risoluzione per serie attorno al punto  $z = 0$ , si risolva la seguente equazione differenziale

$$(1 - z^2) u'' - 2z u' + 12u = 0.$$

### Esercizio 4

Determinare lo sviluppo di Taylor-Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{3 + z}{z^3 + 2z^2}$$

attorno al punto  $z = 0$  determinandone le regioni di convergenza.

**Scritto 14-01-2019**

**Esercizio 1**

Determinare per quali valori del parametro reale  $\beta$  il seguente integrale esiste

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\beta x}}{1 + e^x};$$

determinandone poi il valore utilizzando l'integrazione complessa.

**Suggerimento:** invece del solito percorso semicircolare prendere in considerazione un percorso rettangolare con i lati paralleli all'asse reale ed a quello immaginario.

**Esercizio 2**

Utilizzando l'integrazione complessa si calcoli il seguente integrale

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

**Esercizio 3**

Per ognuna delle funzioni riportate determinare l'espansione in serie nei punti singolari isolati deducendo la natura della singolarità

$$\text{a) } f(z) = \frac{z+1}{z+3}, \text{ b) } f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}.$$

**Esercizio 4**

Determinare i punti singolari delle seguenti funzioni nel piano complesso esteso

$$\text{a) } f(z) = \frac{4z^2 - \pi^2}{\cos z}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^3 - 2}{z^2 - 2z + 5}, \quad \text{c) } f(z) = \ln(z^2 + z - 2).$$

**Scritto 15-02-2019**

**Esercizio 1**

Calcolare, utilizzando l'integrazione complessa, il seguente integrale

$$I = \int_0^{+\infty} dx \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 2**

Sviluppare la seguente funzioni attorno ai punti singolari isolati al finito secondo Taylor-Laurent, discutendo la regione di convergenza.

$$f(z) = \frac{1}{z + z^3}.$$

**Esercizio 3**

Determinare per la seguenti funzioni il dominio di analiticità e la natura delle eventuali singolarit a nel piano complesso esteso

$$f_1(z) = e^{\frac{1}{1+z^2}}, \quad f_2(z) = \log(2 + z^2), \quad f_3(z) = \frac{z^2}{\cos(z)}.$$

**Esercizio 4**

Utilizzando l'integrazione complessa calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 - \cos \theta}{4(1 - \cos \theta) + 1} d\theta.$$



# Prova Scritta del 28/06/2019

## Esercizio 1

Utilizzando l'integrazione in campo complesso, determinare la funzione  $g(t)$  definita da

$$g(t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)^2}{(t x^2 - 1)} dx \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Esercizio 2

Determinare la più generale funzione  $g(z)$  che soddisfa le seguenti proprietà:

1. analitica in tutto il piano complesso tranne che per un polo di ordine uno in  $z = 0$  ed un polo, sempre di ordine uno, in  $z = \infty$ ;
2. i punti  $z = i$  e  $z = -i$  sono degli zeri di  $g(z)$ ;
3. detta  $\gamma$  una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine e orientata positivamente

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(z) dz = 1.$$

## Esercizio 3

Determinare l'espansione di Taylor-Laurent attorno ai punti singolari isolati della funzioni

$$f_1(z) = e^{\frac{1}{(1-z)^2}}, \quad f_2(z) = (z-3) \cos\left(\frac{1}{z+2}\right).$$

## Esercizio 4

Utilizzando l'integrazione complessa calcolare il seguente integrale

$$I = - \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin(\theta)^2}{2 + \cos(\theta)}.$$

## II Parziale 14/01/2020

### Esercizio 1

Utilizzando l'integrazione complessa si calcoli il seguente integrale al variare del parametro reale  $a$

$$I(a) = \int_0^{+\infty} dx \left[ \frac{\sin(ax)}{x} \right]^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

### Esercizio 2

Si consideri la seguente equazione differenziale per la funzione  $f(t)$

$$\ddot{f} + 2\gamma \dot{f} + \omega^2 f = 0, \quad \gamma > 0, \omega > 0.$$

Determinare la funzione di Green  $G(t, t')$  avanzata del sistema utilizzando la sua rappresentazione tramite trasformata di Fourier.

### Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{(\cos \theta)^2}{2 + \cos \theta}.$$

### Esercizio 4

Si consideri la regione di  $\mathbb{R}^2$  descritta dalle coordinate cartesiane  $(x, y)$  con  $y > 0$  e dotata della seguente metrica

$$g = \frac{1}{y^2} (d\mathbf{x} \otimes d\mathbf{x} + d\mathbf{y} \otimes d\mathbf{y}).$$

Data la forma

$$\omega = x y d\mathbf{x} + f(x, y) d\mathbf{y};$$

calcolare il duale di Hodge  $*\omega$  e determinare la forma più generale di  $f$  tale che  $*\omega$  sia esatta.

# Prova Scritta del 14/01/2020

## Esercizio 1

Utilizzando l'integrazione complessa si calcoli il seguente integrale al variare del parametro reale  $a$

$$I(a) = \int_0^{+\infty} dx \left[ \frac{\sin(ax)}{x} \right]^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

## Esercizio 2

Si consideri la seguente equazione differenziale per la funzione  $f(t)$

$$\ddot{f} + 2\gamma \dot{f} + \omega^2 f = 0, \quad \gamma > 0, \omega > 0.$$

Determinare la funzione di Green  $G(t, t')$  avanzata del sistema utilizzando la sua rappresentazione tramite trasformata di Fourier.

## Esercizio 3

Data le funzioni di una variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}}, \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)};$$

determinare il loro dominio di analiticità. Per  $f$  determinare la parte principale dello sviluppo di Laurent nelle eventuali singolarità isolate al finito. Per  $g$  determinare lo serie di Laurent nelle eventuali singolarità isolate al finito.

## Esercizio 4

Si consideri la regione di  $\mathbb{R}^2$  descritta dalle coordinate cartesiane  $(x, y)$  con  $y > 0$  e dotata della seguente metrica

$$g = \frac{1}{y^2} (d\mathbf{x} \otimes d\mathbf{x} + d\mathbf{y} \otimes d\mathbf{y}).$$

Data la forma

$$\omega = x y d\mathbf{x} + f(x, y) d\mathbf{y};$$

calcolare il duale di Hodge  $*\omega$  e determinare la forma più generale di  $f$  tale che  $*\omega$  sia esatta.