

Laboratorio di Calcolatori II - A.A. 2006/07

EDO del secondo ordine: l'oscillatore armonico

22 Febbraio 2007

L'ubiquità del modello di oscillatore armonico in fisica deriva dal fatto che molti fenomeni fisici importanti in vari ambiti possono essere rappresentati in maniera più o meno approssimata da questo semplice modello analitico. L'equazione del moto di questo modello unidimensionale, nella sua forma generale in presenza di attrito viscoso e di una forzante esterna sinusoidale (in un sistema di unità di misura in cui la massa m è unitaria), è

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

dove ω_0 è la pulsazione di oscillazione naturale del sistema, γ il coefficiente di attrito viscoso e f_0 e ω l'intensità e la pulsazione del campo esterno. La soluzione generale dell'equazione (1), in termini delle condizioni iniziali $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$, è

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A \cos(\omega_\gamma t) + B \sin(\omega_\gamma t)] + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t + \theta) \quad (2)$$

$$A = x_0 - \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\theta) \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{\omega_\gamma} \left(v_0 + \frac{\gamma}{2} x_0 + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \sin(\theta) \right) \quad (4)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (5)$$

$$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (6)$$

(se $\gamma > 2\omega_0$, ω_γ è immaginaria e il moto libero non è oscillatorio ma solo smorzato).

L'energia meccanica del sistema, definita come somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$E(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2(t) + \omega_0^2 x^2(t)), \quad (7)$$

è una costante del moto in assenza di attrito e di campo esterno. In questo caso il sistema è conservativo, la forza dipende solo dalla posizione ed è ricavabile dal potenziale $V(x) = \omega_0^2 x^2/2$. In presenza di attrito, il sistema isolato dissipa l'energia iniziale in un tempo $\tau \sim \gamma^{-1}$ e il moto si arresta nella posizione di minimo dell'energia potenziale ($x_\infty = 0$). Se su tale sistema agisce un

campo esterno del tipo in equazione (1), il moto dopo un transiente di durata $\tau \sim \gamma^{-1}$ raggiunge uno stato in cui l'energia fornita dal campo esterno viene dissipata dall'attrito viscoso e il moto diventa stazionario con pulsazione ω . In questo caso l'energia meccanica è ancora conservata, ma solo in media (sul periodo). La potenza fornita al sistema è definita come il lavoro compiuto dal campo nell'unità di tempo. La sua media sul periodo è

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} d\tau f_0 \cos(\omega\tau) \dot{x}(\tau) = \frac{\gamma\omega^2}{2} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (8)$$

mentre l'energia meccanica mediata sul periodo è (sempre con $m = 1$)

$$\langle E \rangle_T = \frac{1}{2} (\langle \dot{x}^2(t) \rangle + \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle) = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{2} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (9)$$

1. Scrivere un programma per ottenere la soluzione numerica dell'equazione (1) con il metodo di Runge-Kutta all'ordine 4:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) \\ k_1 &= hv_n \\ j_1 &= hf(t_n, x_n, v_n) \\ k_2 &= h(v_n + \frac{j_1}{2}) \\ j_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{j_1}{2}) \\ k_3 &= h(v_n + \frac{j_2}{2}) \\ j_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{j_2}{2}) \\ k_4 &= h(v_n + j_3) \\ j_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3, v_n + j_3) \end{aligned} \quad (10)$$

dove la forza $f(t, x, v)$ nel nostro caso è

$$f(t, x, v) = f_0 \cos(\omega t) - \omega_0^2 x - \gamma \dot{x} \quad (11)$$

2. Per il sistema isolato in assenza di attrito, implementare anche l'algoritmo di Verlet

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hv_n + \frac{h^2}{2} f(x_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} (f(x_n) + f(x_{n+1})) \end{aligned} \quad (12)$$

e confrontare l'andamento dell'energia nel tempo. Verificare che con l'algoritmo di Verlet l'energia non è costante nel tempo ma oscilla intorno ad un valore costante, mentre con RK4 la variazione a tempi corti è molto minore (a parità di passo h) ma l'andamento presenta un drift costante nel tempo. Sempre per il sistema isolato senza attrito discutere

la scelta del passo di integrazione h che verrà usato nel seguito dell'esperienza. Adottare un criterio sulla conservazione dell'energia piuttosto che sulla qualità della traiettoria (come fatto nell'esperienza precedente). Questo criterio è più generale e può essere usato per situazioni in cui la soluzione non è nota a priori (studiare $|E(t) - E(0)|/E(0)$ in funzione di h).

3. Ripetere lo studio del punto precedente per un potenziale lineare

$$V(x) = \omega_0^2 |x| \qquad f(x) = -\omega_0^2 \frac{x}{|x|} \qquad (13)$$

Come cambia la conservazione dell'energia e perchè? e le considerazioni sulla qualità dei due algoritmi considerati?

4. Implementare nel codice un algoritmo che calcola il periodo del moto definito come la differenza dei tempi di passaggio per l'origine della posizione. Utilizzare un'interpolazione lineare tra i valori (t_n, x_n) della soluzione numerica ottenuta durante l'integrazione.
5. In maniera più generale il periodo del moto è definito come il tempo che impiega la traiettoria del sistema nello spazio delle fasi per tornare al punto di partenza. Implementare numericamente questa definizione di periodo e confrontare il valore che se ne ricava con quello ottenuto al punto precedente.
6. Verificare che l'oscillatore armonico isolato e senza attrito è *isocrono*: il periodo non dipende dall'ampiezza del moto, ossia dall'energia.
7. Studiare l'andamento del periodo al variare dell'energia nel modello con potenziale lineare: è anch'esso *isocrono*?
8. Considerare l'oscillatore armonico con una forzante.

- (a) studiare, per $\omega \simeq \omega_0$, la soluzione del sistema al variare dell'ampiezza del campo. Nel caso di battimenti verificare che le due frequenze sono rispettivamente $\omega_1 = (\omega + \omega_0)/2$ e $\omega_2 = (\omega - \omega_0)/2$. In effetti se scegliamo come condizioni iniziali $x_0 = 0, v_0 = 0$ la soluzione generale (2) (per $\gamma = 0$) è

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)] = \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \quad (14)$$

- (b) fissare l'ampiezza del campo e studiare la soluzione al variare di ω
- (c) ripetere lo studio in presenza di attrito. Verificare in particolare che la frequenza naturale del sistema è ora ω_γ .