

Laboratorio di Calcolatori II - A.A. 2007/08

Generatori di numeri casuali e integrazione Monte Carlo

15 maggio 2008

Scrivere un programma per la generazione di numeri pseudo-aleatori con i due diversi generatori RANDU e il generatore di Marsaglia. Il generatore RANDU è un generatore *Linear Congruential* definito dalla relazione ricorsiva

$$\begin{aligned} r_i &= \text{mod}(a * r_{i-1} + c, M) \\ x_i &= \frac{r_i}{M} \end{aligned}$$

dove **mod** è la funzione che fornisce il resto della divisione tra il primo e il secondo argomento e **a**, **c** e **M** sono i numeri interi di valore

$$a = 2^{16} + 3 \quad c = 0 \quad M = 2^{31} \quad (1)$$

Il generatore di Marsaglia è invece fornito nel file **marsaglia.f**. In questo file si trovano tre subroutines: **rmaset**, **rmar**, **rmaget** che servono, rispettivamente, a inizializzare la sequenza dei numeri casuali, a generare un numero casuale, a salvare l'ultimo numero casuale in un file di nome **rmaseed.dat** che verrà generato nella cartella di esecuzione del programma al momento della chiamata di **rmaget**. Il file **rmaseed.dat** potrà essere letto dalla subroutine **rmaset** alla prossima esecuzione del programma per poter generare una sequenza a partire dall'ultimo numero aleatorio generato nel run precedente. Un tipico uso di questa struttura è il seguente

```
program main
.....
.....                               linee dichiarative
.....
integer iii
real*8 x
logical ife

.....
ife=.false.
inquire(file='rmaseed.dat',exist=ife)
iii=0
if (ife) iii=1
call rmaget(iii)      ! inizializza la sequenza leggendo il seed in rmaseed.dat
```

```

                                ! se il file esiste, altrimenti usa un valore di default
.....
.....

call rmar(x)                    ! estrazione di un numero aleatorio

.....
.....

call rmaget(0)                  ! salva l'ultimo numero estratto in rmaseed.dat

stop
end

```

Con entrambi i generatori generare N numeri aleatori distribuiti uniformemente in [0,1) e calcolare:

1. il loro istogramma dividendo l'intervallo di definizione in m parti e contando il numero di estrazioni che cadono in ciascuna parte. Normalizzare opportunamente l'istogramma, calcolare il χ^2 ed effettuare il test di bontà dell'istogramma.
2. i momenti della distribuzione di ordine $k \leq 20$ definiti da

$$\langle x^k \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k \quad (2)$$

e la loro varianza. Confrontare i risultati con i valori teorici $\langle x^k \rangle = (k+1)^{-1}$.

3. le correlazioni a k-vicini definite da

$$C(k) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k} \quad (3)$$

e le loro varianze. Confrontare con il risultato teorico atteso $C(k) = 1/4$.

Ripetere questo studio al variare del numero di estrazioni N e verificare che le varianze decrescono come $1/\sqrt{N}$.

Utilizzare il generatore di Marsaglia per calcolare il valore di π estraendo coppie di numeri aleatori uniformi nel quadrato di lato 1 centrato nell'origine. L'area del cerchio di raggio unitario, e quindi il valore di π è stimato dal numero di coppie estratte interne al cerchio diviso il numero totale di coppie estratte. Studiare l'andamento dell'errore con il numero di coppie estratte. Quante estrazioni sono necessarie per calcolare π con una precisione di una unità sulla sesta cifra decimale?

Ripetere l'esperienza del punto precedente per calcolare il volume dell'ipersfera di raggio R a dimensione generica D. Confrontare il risultato numerico con il valore teorico

$$S_D(R) = \frac{\pi^{D/2} R^D}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \quad (4)$$

dove vale la relazione ricorsiva $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ con $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Per n intero la relazione ricorsiva fornisce $\Gamma(n+1) = n!$. Calcolare la varianza della stima numerica e studiare l'andamento del numero di estrazioni necessario per avere una varianza fissata all'aumentare della dimensione D dello spazio.

Per effettuare il test di qualità dell'istogramma dobbiamo calcolare la probabilità del χ^2 dalla funzione Gamma incompleta

$$Q\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\chi^2}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \int_{\chi^2/2}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{\nu}{2}-1} dt \quad (5)$$

questo può essere fatto utilizzando delle tavole numeriche oppure la routine `gammq.f` di Numerical Recipes. Un file `gammq.f` può essere scaricato dal sito del corso nella directory `ROUTINES`. La spiegazione del programma e del suo utilizzo può essere trovata nel file `Chap6.pdf` sempre sul sito del corso. ATTENZIONE: le routines sono state modificate per lavorare in doppia precisione!!