

Laboratorio di Calcolatori II - A.A. 2007/08

EDO: Equazione di crescita di una popolazione

3 aprile 2008

La variazione nel tempo di una popolazione $N(t)$ può essere descritta dall'equazione differenziale ordinaria non lineare del primo ordine

$$\frac{dN}{dt} = [b - m_1 N(t)]N(t) \quad (1)$$

dove b rappresenta il tasso di natalità per individuo e $m_1 N(t)$ il tasso di mortalità per individuo. La soluzione analitica di quest'equazione, facilmente ottenibile per separazione delle variabili, è

$$N(t) = \frac{bN_0 e^{bt}}{b + m_1 N_0 (e^{bt} - 1)} \quad (2)$$

con $N_0 = N(0)$, ed ha un comportamento di crescita esponenziale a tempi corti ($bt \ll 1$) seguito da una saturazione a tempi lunghi verso un valore costante. È immediato verificare che il valore asintotico ($t \gg 1/b$) della soluzione è $N_\infty = b/m_1$.

- Scrivere un programma per ottenere la soluzione numerica dell'equazione con i seguenti metodi

1. Eulero:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n) + O(h^2)$$

2. Runge-Kutta 2:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + O(h^3) \\ k_1 &= hf(x_n) \\ k_2 &= hf(x_n + k_1) \end{aligned}$$

3. Runge-Kutta 4 :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \\ k_1 &= hf(x_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + k_3) \end{aligned}$$

4. "Verlet 1":

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2(b - 2m_1x_n)f(x_n) + O(h^4)$$

5. "Verlet 2":

$$x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf(x_n) + O(h^3)$$

con $f(x) = (b - m_1x)x$.

- Scegliere a piacere opportuni valori dei parametri a, b, N_0 (per poter ottenere la soluzione analitica deve essere $b - m_1N(t) \neq 0, \forall t \geq 0$) e un tempo di integrazione t_{max} e studiare l'andamento dell'errore globale dei vari schemi al variare del passo di integrazione h . Verificare che l'errore globale è un'ordine di grandezza più grande di quello locale.
- ripetere lo studio del punto precedente scegliendo $t_{max} \simeq 1/10b$, $t_{max} \simeq 1/b$ e $t_{max} \simeq 10/b$. Come cambia l'errore globale al variare del punto scelto?
- per uno dei casi studiati, confrontare i risultati che si ottengono in singola e doppia precisione.
- confrontare l'efficienza dei vari schemi di integrazione considerati. L'efficienza di uno schema è definita come il tempo di calcolo necessario per integrare l'equazione differenziale fino ad un certo t_{max} con un valore prefissato dell'errore globale.