

Laboratorio di Calcolatori II - A.A. 2007/08

EDO del secondo ordine: il pendolo semplice

24 aprile 2008

Il pendolo semplice rappresenta probabilmente il più semplice modello di sistema Newtoniano non lineare, e non risolubile analiticamente. In termini dell'angolo di apertura θ (vedi la figura) il problema è unidimensionale e l'equazione del moto, in presenza di attrito viscoso e di una forzante sinusoidale, è

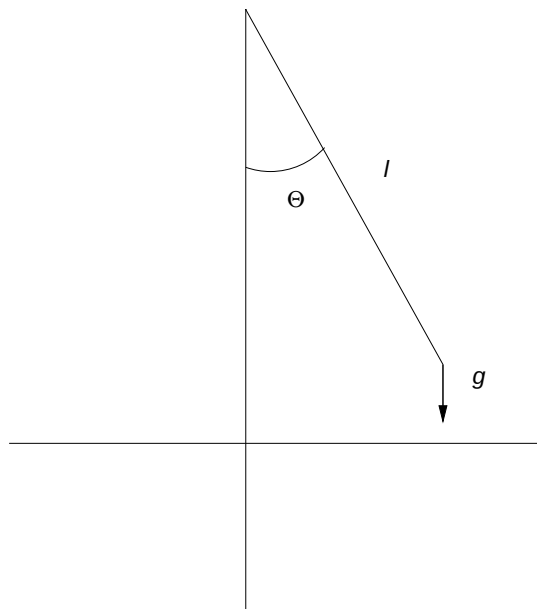


Figura 1: il pendolo semplice. Abbiamo per semplicità assunto la massa unitaria.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin(\theta) = f_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

dove $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ è la pulsazione di oscillazione naturale del sistema (g è l'accelerazione di gravità e l la lunghezza del pendolo), γ il coefficiente di attrito viscoso e f_0 e ω l'intensità e la pulsazione del campo esterno. Nel limite di piccole oscillazioni, ossia quando l'angolo di apertura massimo θ_M è tale che $\sin(\theta_M) \simeq \theta_M$, l'equazione (1) si riduce a quella dell'oscillatore armonico considerato nell'esperienza precedente e di conseguenza la soluzione è analitica.

L'energia meccanica del sistema è la somma della cinetica e della potenziale

$$E = K(\theta) + P(\theta) = \frac{l^2}{2} \dot{\theta}^2 + 2\omega_0^2 l^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2)$$

dove abbiamo supposto $m = 1$.

Consideriamo dapprima il caso del pendolo in assenza di attrito e di forzante: $\gamma = 0, f_0 = 0$. Poichè il sistema è isolato, l'energia meccanica è conservata durante il moto. In base a questa legge di conservazione possiamo distinguere 3 diversi tipi di comportamento:

1. se l'energia $E < 2gl$ il moto è oscillatorio intorno alla posizione di minimo dell'angolo $\theta = 0$. A causa della nonlinearità della forza di richiamo, il pendolo non è isocrono, ossia il suo periodo dipende dalle condizioni iniziali. È facile mostrare che il periodo del moto è lo stesso per tutte le condizioni iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ con stessa energia E . In questo caso, la traiettoria nello spazio delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$ percorre un'orbita chiusa intorno all'origine. La dimensione dell'orbita aumenta all'aumentare dell'energia del moto.
2. se l'energia $E > 2gl$ il moto è rotatorio con verso concorde alla velocità iniziale del moto. Nello spazio delle fasi la soluzione percorre una orbita aperta.
3. $E = E_c = 2gl$ è la condizione di crossover tra questi due regimi. Se l'angolo iniziale è $\theta_0 = \pm\pi$ il sistema è fermo in una posizione di equilibrio instabile con velocità nulla. In pratica una indeterminazione per quanto piccola della condizione iniziale fa muovere il pendolo dalla condizione instabile. Se l'energia che ne risulta è inferiore al valore critico E_c allora il moto risulterà oscillatorio, se è superiore il moto sarà rotatorio. In entrambe i casi il periodo tenderà all'infinito perchè il pendolo impiegherà un tempo infinito per ritornare alla posizione iniziale.

È possibile ottenere un'espressione analitica del periodo del pendolo (vedi *La fisica di Berkeley-Meccanica*, Kittel-Knight-Ruderman, Zanichelli, 1970) in termini dell'integrale ellittico completo di prima specie

$$T = \frac{4}{\omega_0} I(k)$$

$$I(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 k^{2n} \right\} \quad (3)$$

dove $k = \sin(\theta_M/2)$. L'integrale $I(k)$ è definito per $k \in [0, 1)$ mentre diverge per $k = 1$ (vedere la tavola numerica distribuita a lezione). Il valore $k = 1$ corrisponde al valore $\theta_M = \pm\pi$ per il quale, con ragionamenti qualitativi, avevamo già stabilito che il periodo dovesse divergere. Lo sviluppo di $I(k)$ al primo ordine, insieme allo sviluppo

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48} + O(\theta^5) \quad (4)$$

fornisce

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_M^2}{16} \right) + O(\theta_M^4) \quad (5)$$

che descrive la prima variazione del periodo con l'ampiezza delle oscillazioni.

Stessa dipendenza della pulsazione dall'ampiezza delle oscillazioni si ottiene sviluppando, al secondo ordine, il $\sin(\theta)$ nell'equazione del moto e assumendo una soluzione della forma

$$\theta(t) = \theta_M [\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t)] \quad (6)$$

Sostituendo questa soluzione di prova nell'equazione del moto così ottenuta, e considerando solo i termini all'ordine più basso in θ_M si riottiene l'equazione (5) e un'espressione per l'ampiezza relativa della terza armonica rispetto alla prima (vedi *La fisica di Berkeley-Meccanica*, Kittel-Knight-Ruderman, Zanichelli, 1970)

$$\epsilon = \frac{\theta_M^2}{192} + O(\theta_M^4) \quad (7)$$

Questo sviluppo ci fa capire che in presenza di effetti non lineari nella forza di richiamo la pulsazione delle oscillazioni cambia e la soluzione del moto è la sovrapposizione lineare di oscillazioni con frequenze multiple della frequenza fondamentale.

1. Modificare il programma sviluppato nell'esperienza precedente per studiare il pendolo semplice con l'algoritmo di Runge-Kutta all'ordine 4.
2. Determinare il periodo del pendolo al variare dell'energia o dell'ampiezza iniziale. Riportare le “misure” ottenute in una tabella insieme ai valori teorici forniti dall'equazione (3) (se i valori di θ scelti non corrispondono ai valori tabulati per l'andamento teorico usare un'interpolazione lineare della tabella o meglio un'integrazione numerica). Graficare l'andamento del periodo e l'errore rispetto al valore teorico.
3. Determinare numericamente il valore di θ_M per cui l'equazione (5) risulta verificata all'interno di un'incertezza relativa del 5%. Verificare che la soluzione corrispondente contiene la pulsazione fondamentale e la terza armonica e determinare il peso relativo ϵ tramite un fit lineare con gnuplot. Confrontare il risultato con la previsione fornita dall'equazione (7)
4. Cercare, al crescere di θ_M , quale armonica ulteriore appare per prima nella soluzione e determinarne il peso in funzione di θ_M
5. Confrontare le orbite nello spazio delle fasi con quelle dell'oscillatore armonico di stessa energia al variare dell'energia nell'intervallo $E \in (0, 2gl)$

Consideriamo ora il pendolo con una forzante e in presenza di attrito e cerchiamo di riprodurre gli andamenti suggeriti nel libro (R. H. Landau and M.J. Paez, *Computational Physics, Problem Solving with computers*, Wiley & Sons (1997).), in particolare nel paragrafo 14.8.

1. Fissare $\gamma = 0.2$, $f_0 = 0.52$, $\omega = 0.666$ e studiare la soluzione del sistema per le diverse condizioni iniziali: a) $\theta_0 = -0.0885$, $\dot{\theta}_0 = 0.8$; b) $\theta_0 = -0.0883$, $\dot{\theta}_0 = 0.8$; c) $\theta_0 = -0.0888$, $\dot{\theta}_0 = 0.8$. Per ogni sistema plottare la traiettoria $\theta(t)$ e l'orbita nello spazio delle fasi e discutere i comportamenti osservati.
2. Usare gli stessi valori dei parametri del caso precedente ma variare la pulsazione della forzante. Esplorare il range $\omega \in [0.6, 0.7]$ e cercare di individuare regioni con diversi comportamenti.

TAVOLA 43	INTEGRALI ELLITTICI COMPLETI DI PRIMA E SECONDA SPECIE $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad k = \sin \psi$
---------------------	--

ψ	K	E
0°	1.5708	1.5708
1	1.5709	1.5707
2	1.5713	1.5703
3	1.5719	1.5697
4	1.5727	1.5689
5	1.5738	1.5678
6	1.5751	1.5665
7	1.5767	1.5649
8	1.5785	1.5632
9	1.5805	1.5611
10	1.5828	1.5589
11	1.5854	1.5564
12	1.5882	1.5537
13	1.5913	1.5507
14	1.5946	1.5476
15	1.5981	1.5442
16	1.6020	1.5405
17	1.6061	1.5367
18	1.6105	1.5326
19	1.6151	1.5283
20	1.6200	1.5238
21	1.6252	1.5191
22	1.6307	1.5141
23	1.6365	1.5090
24	1.6426	1.5037
25	1.6490	1.4981
26	1.6557	1.4924
27	1.6627	1.4864
28	1.6701	1.4803
29	1.6777	1.4740
30	1.6858	1.4675

ψ	K	E
30°	1.6858	1.4675
31	1.6941	1.4608
32	1.7028	1.4539
33	1.7119	1.4469
34	1.7214	1.4397
35	1.7312	1.4323
36	1.7415	1.4248
37	1.7522	1.4171
38	1.7633	1.4092
39	1.7748	1.4013
40	1.7868	1.3931
41	1.7992	1.3849
42	1.8122	1.3765
43	1.8256	1.3680
44	1.8396	1.3594
45	1.8541	1.3506
46	1.8691	1.3418
47	1.8848	1.3329
48	1.9011	1.3238
49	1.9180	1.3147
50	1.9356	1.3055
51	1.9539	1.2963
52	1.9729	1.2870
53	1.9927	1.2776
54	2.0133	1.2681
55	2.0347	1.2587
56	2.0571	1.2492
57	2.0804	1.2397
58	2.1047	1.2301
59	2.1300	1.2206
60	2.1565	1.2111

ψ	K	E
60°	2.1565	1.2111
61	2.1842	1.2015
62	2.2132	1.1920
63	2.2435	1.1826
64	2.2754	1.1732
65	2.3088	1.1638
66	2.3439	1.1545
67	2.3809	1.1453
68	2.4198	1.1362
69	2.4610	1.1272
70	2.5046	1.1184
71	2.5507	1.1096
72	2.5998	1.1011
73	2.6521	1.0927
74	2.7081	1.0844
75	2.7681	1.0764
76	2.8327	1.0686
77	2.9026	1.0611
78	2.9786	1.0538
79	3.0617	1.0468
80	3.1534	1.0401
81	3.2553	1.0338
82	3.3699	1.0278
83	3.5004	1.0223
84	3.6519	1.0172
85	3.8317	1.0127
86	4.0528	1.0086
87	4.3387	1.0053
88	4.7427	1.0026
89	5.4349	1.0008
90	∞	1.0000