

La Relatività in Fisica delle Particelle

Prof. Sergio Petrer
Università degli Studi dell'Aquila

14 dicembre 2016

Capitolo 1

La cinematica relativistica

1.1 Introduzione

Queste lezioni complementano il corso introduttivo alla relatività ristretta, svolto in altri corsi, considerando in particolare i fenomeni d'urto (e di decadimento) in fisica delle particelle. È in questo campo che la relatività ristretta manifesta in modo esplicito le differenze dalla meccanica classica: infatti è alquanto comune in fisica delle particelle considerare un fenomeno in cui si passa da uno stato iniziale di una o due particelle a quello finale in cui le particelle sono completamente, o in parte, diverse (merito di $E = mc^2$!). Inoltre gli effetti relativistici in fisica delle particelle sono assolutamente ordinari (e non soltanto piccole correzioni), poiché le particelle hanno spesso velocità confrontabili con quella della luce.

Le lezioni trattano di cinematica e quindi tutto ruota intorno al quadrimpulso e alle proprietà dei quadrivettori. Verrà anche fatto un uso sistematico degli invarianti relativistici: tale metodo costituisce spesso una via facilitata alla soluzione dei problemi, senza l'utilizzo di trasformazioni di Lorentz. Le lezioni sono in gran parte ispirate al bel libro (ahimé non più pubblicato): R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics*, Benjamin Inc..

1.2 Quadrivettori e invarianti relativistici

1.2.1 Richiamo alle trasformazioni di Lorentz

Indicando con $\{ct, x, y, z\}$ e $\{ct', x', y', z'\}$ le coordinate temporale e spaziali rispettivamente nei sistemi $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$, con $\mathbf{K}'$ che si muove con velocità β lungo l'asse x , le trasformazioni di Lorentz si scrivono:

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (1.1)$$

Può essere utile considerare il caso generale in cui i due sistemi traslano con una velocità qualsiasi, non necessariamente parallela ad uno degli assi coordinati. Se β non è diretto lungo x , basta allora decomporre $\mathbf{x}$ nelle componenti parallela e perpendicolare a β :

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \beta \frac{\beta \cdot \mathbf{x}'}{\beta^2}, \quad \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}' - \beta \frac{\beta \cdot \mathbf{x}'}{\beta^2}$$

Si noti che viene usato il punto per il prodotto scalare tra vettori tridimensionali, al fine di facilitare il riconoscimento di tali vettori. La trasformazione (1.1) può riscriversi:

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{x}'_{\parallel} + c\beta t'), \quad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x}'_{\perp}, \quad ct = \gamma(ct' + \beta \cdot \mathbf{x}')$$

Quindi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} = \gamma \left(\beta \frac{\beta \cdot \mathbf{x}'}{\beta^2} + c\beta t' \right) + \mathbf{x}' - \beta \frac{\beta \cdot \mathbf{x}'}{\beta^2} = \mathbf{x}' + \beta \left(\beta \cdot \mathbf{x}' \frac{\gamma - 1}{\beta^2} + \gamma ct' \right)$$

Infine, osservando che $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$, si ottiene la *forma vettoriale generale delle trasformazioni di Lorentz*:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \beta \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta \cdot \mathbf{x}' + ct' \right), \quad ct = \gamma(ct' + \beta \cdot \mathbf{x}') \quad (1.2)$$

1.2.2 Quadrivettori e invarianti

Un sistema di quattro variabili che si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz è chiamato *quadrivettore* dello spazio-tempo. Il quadrivettore *raggio vettore quadridimensionale*, $x = \{ct, \mathbf{x}\} = \{ct, x, y, z\}$ è il primo finora incontrato. Per questo motivo lo considereremo il quadrivettore fondamentale e da esso sarà possibile derivare tutti gli altri.

È facile verificare che, se P è un quadrivettore¹, allora:

- aP è anch'esso un quadrivettore, con a scalare.
- $P + Q$ è anch'esso un quadrivettore, con Q quadrivettore.

Una trasformazione di Lorentz lascia invariata la norma di un quadrivettore²:

$$P^2 = P_0^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = \text{invariante}$$

Per comprendere meglio le implicazioni dell'invarianza della norma, consideriamo in particolare il quadrivettore che congiunge due punti dello spazio-tempo (detti *eventi*). Dati due eventi P_1 e P_2 , la quadrupla $\Delta s = \{\Delta(ct), \Delta x, \Delta y, \Delta z\}$, costruita con le differenze tra le coordinate temporali e spaziali nel sistema di inerziale $\mathbf{K}$, è anch'essa un quadrivettore.

¹I quadrivettori verranno rappresentati con lettere, senza alcun apice o pedice (ad es. V). Le componenti verranno indicate con apice (pedice) per quadrivettori controvarianti (covarianti) (ad es. V^μ). L'indice sarà 0 per la componente temporale e 1, 2, 3 (oppure x, y, z) per quelle spaziali. I vettori euclidei tridimensionali proiezione di un quadrivettore sullo spazio (x, y, z) verranno rappresentati con lo stesso simbolo in grassetto (ad es. il 3-vettore di V è $\mathbf{V}$).

²La norma di un quadrivettore trova nella letteratura definizioni diverse. Questo dipende dalla metrica utilizzata nel testo. Qui utilizzeremo quella più popolare nei testi di fisica delle particelle. Per il quadrivettore V , di componenti V^μ ($\mu = 0, x, y, z$), la norma è:

$$\mathcal{N}(V) = V^2 = \sum_{\mu=0}^3 V^\mu V_\mu = V_0^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2 = V_0^2 - \mathbf{V}^2$$

La norma di Δs è:

$$\Delta s^2 = \Delta(ct)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad . \quad (1.3)$$

Indicando con apici le coordinate nel sistema $\mathbf{K}'$, si ha:

$$\Delta s^2 = \Delta(ct)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta(ct')^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (1.4)$$

Δs^2 è detto un *invariante relativistico*.

Supponiamo ora che esista un sistema $\mathbf{K}'$ in cui i due eventi siano contemporanei. In quel sistema la norma di Δs è ≤ 0 , ma essendo un invariante, lo è sempre:

$$\Delta s^2 = \Delta(ct)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = -\Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \leq 0 \quad . \quad (1.5)$$

Ne consegue che:

- Esiste un sistema in cui P_1 e P_2 sono *contemporanei se e solo se* $\Delta s^2 \leq 0$. Si dice allora che il quadrivettore Δs è di *tipo spazio* o *space-like*.

Supponiamo invece che esista un sistema $\mathbf{K}'$ in cui i due eventi siano nello stesso luogo. In quel sistema la norma invariante di Δs è:

$$\Delta s^2 = \Delta(ct)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta(ct')^2 \geq 0 \quad . \quad (1.6)$$

Ne consegue che:

- Esiste un sistema in cui P_1 e P_2 sono *nello stesso luogo se e solo se* $\Delta s^2 \geq 0$. Si dice allora che il quadrivettore Δs è di *tipo tempo* o *time-like*.

Gli eventi con $\Delta s^2 = 0$ si riferiscono al caso in cui essi siano collegabili da un raggio di luce (la luce parte in P_1 al tempo t_1 e raggiunge P_2 al tempo t_2 , se $t_2 > t_1$).

- Un quadrivettore Δs di norma nulla, si dice *appartenente al cono di luce*.

La caratteristica dei quadrivettori di appartenere ad una delle tre categorie è *assoluta*, perché la loro norma è un invariante.

Ritornando al caso del quadrivettore Δs , rappresentiamo nel piano (x, ct) il punto P_1 . Ignoriamo le altre coordinate: per semplicità possiamo assumerele nulle per entrambi i punti. A seconda della posizione di P_2 il corrispondente quadrivettore Δs può essere appartenere ad una delle tre categorie. Allora, *visto dall'evento* P_1 , lo spazio tempo si divide in quattro zone (vedi fig. 1.1):

1. *il cono di luce*, il luogo dei punti P_2 per cui Δs^2 è nullo.
2. *l'altrove assoluto*, il luogo dei punti P_2 per cui Δs^2 è di *tipo spazio* (< 0).
3. *il passato assoluto*, il luogo dei punti P_2 per cui Δs^2 è di *tipo tempo* (> 0) e $\Delta(ct) < 0$.
4. *il futuro assoluto*, il luogo dei punti P_2 per cui Δs^2 è di *tipo tempo* (> 0) e $\Delta(ct) > 0$.

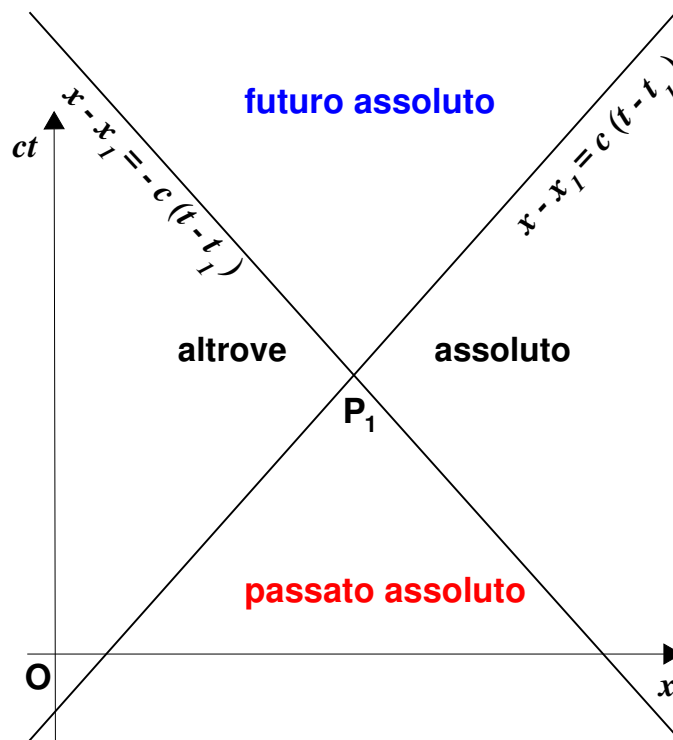


Figura 1.1: Lo spazio-tempo relativamente all'evento P_1 .

Nell'altrove assoluto la *contemporaneità è possibile, ma è relativa*. Questo significa che ci può essere un P_2 che in un sistema di riferimento è allo stesso tempo, ma in altri può essere antecedente oppure successivo. La sequenza degli eventi non è quindi assoluta e pertanto *non ci può essere causalità* tra P_1 e P_2 . Invece il concetto di *altrove* (o la sua negazione) è assoluto.

Nel passato (futuro) assoluto P_2 *precede (segue) sempre* P_1 , qualunque sia il sistema di riferimento. La sequenza degli eventi è quindi assoluta e pertanto *ci può essere rapporto di causalità* tra P_1 e P_2 . Invece sia per il passato che per il futuro assoluto il concetto di *altrove* è relativo: i due eventi possono accadere nello stesso luogo o altrove a seconda del sistema di riferimento.

1.2.3 I quadrivettori della cinematica

1. *il raggio vettore quadridimensionale*: $x = \{ct, \mathbf{x}\} = \{ct, x, y, z\}$
2. *la quadrivelocità*. Indichiamo con t_0 il *tempo proprio* della particella. Questo è il tempo nel sistema di riferimento (istantaneo) $\mathbf{K}_0$ in cui la particella è in quiete. In tale sistema si ha $ds^2 = c^2 dt_0^2$, in quanto $dx_0 = dy_0 = dz_0 = 0$. Ma poiché ds^2 è invariante, allora segue che anche $dt_0 (= dt/\gamma)$ è *invariante* (quindi scalare). Definiamo quadrivelocità:

$$V = \frac{dx}{dt_0}$$

È un quadrivettore essendo il prodotto di un quadrivettore per uno scalare. È di *tipo tempo*. Infatti:

$$V = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \{\gamma c, \gamma \mathbf{v}\}$$

dove $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, e quindi:

$$V^2 = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = c^2$$

Si noti che nel limite classico ($\beta \rightarrow 0$), $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{v}$.

3. *il quadrimpulso*. È definito come:

$$P = mV$$

dove m è la massa a riposo della particella. Essendo questa uno scalare, P è un quadrivettore, le cui componenti sono:

$$P = \{m\gamma c, m\gamma \mathbf{v}\} \quad (1.7)$$

È anch'esso di *tipo tempo*. Infatti:

$$P^2 = m^2 c^2$$

Nel limite classico, la componente spaziale tende all'impulso classico: $\mathbf{P} \rightarrow m\mathbf{v} = \mathbf{p}$. La componente temporale tende invece a mc . Definendo $E_0 = mc^2$, *l'energia di riposo* della particella di massa m (che non ha equivalente classico!), possiamo scrivere:

$$P = \left\{ \frac{E}{c}, \gamma \mathbf{p} \right\}$$

con $E = E_0 + T$. E è *l'energia relativistica* (o energia tout court). Per questo motivo il quadrimpulso è anche detto il quadrivettore *energia-impulso*. Per comprendere il significato di T , basta fare il limite classico:

$$T = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1) \rightarrow mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

La figura 1.2 illustra le proprietà delle grandezze cinematiche legate al quadrivettore energia-impulso e i loro limiti classici.

T è *l'energia cinetica relativistica*.

1.3 Esempi d'uso degli invarianti relativistici

Gli esempi che seguono, a parte la loro utilità nella pratica della fisica delle particelle, servono ad illustrare l'uso degli invarianti relativistici. Infatti le relazioni che legano le variabili cinematiche nei vari sistemi di riferimento possono essere ricavate in modo rapido e talvolta sorprendente facendo uso esclusivo degli invarianti. Più comunemente il calcolo è effettuato utilizzando le trasformazioni di Lorentz, ma risulta notevolmente più lungo e noioso. Inoltre, nella maggioranza dei casi, occorre utilizzare la forma più generale delle

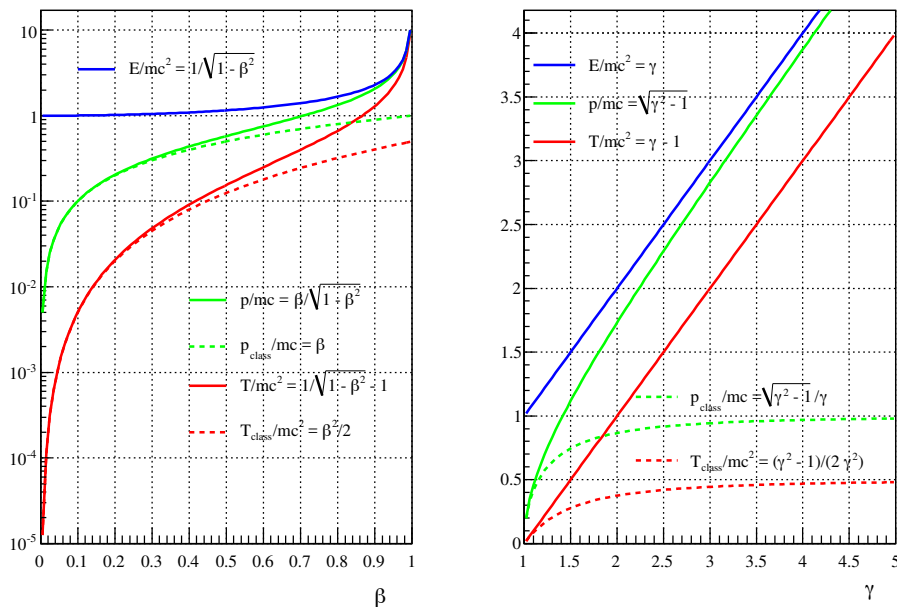


Figura 1.2: L'energia totale, l'energia cinetica e l'impulso come funzioni di β e γ . Anche i limiti classici ($\beta \rightarrow 0$) sono mostrati in figura.

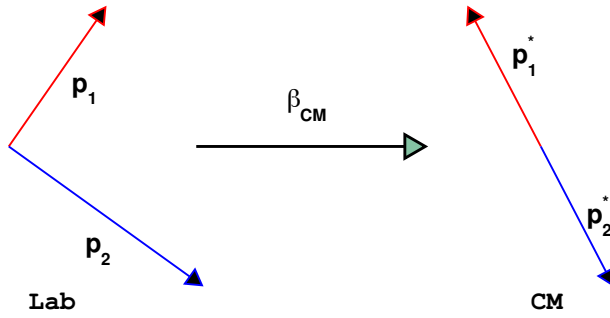
trasformazioni di Lorentz (eq. 1.2), ma questa non è né semplice né facile da usare. Invece l'uso degli invarianti richiede la sola conoscenza della norma di un quadrivettore.

Nella pratica della fisica particellare un problema comune è quello di collegare i quadrimpulsi tra due diversi sistemi di riferimento inerziali, ad es. il laboratorio e il centro di massa o il sistema di riposo di una particella che decade. Gli invarianti relativistici sono gli stessi nei due sistemi e pertanto tale collegamento consiste in una semplice uguaglianza. Il *Principio di conservazione del quadrimpulso*

$$\sum_{j=1}^{N_{ini}} P_j^{ini} = \sum_{j=1}^{N_{fin}} P_j^{fin}$$

collegherà i due sistemi anche quando sarà occorsa una interazione, per cui potremo usare un sistema per lo *stato iniziale* ed un altro per lo *stato finale*.

Nel primo esempio vengono ricavati la velocità e il fattore di Lorentz che portano nel centro di massa di due particelle. La limitazione a due particelle, in questo caso, non riduce l'importanza dell'esempio. Infatti lo stato iniziale di un processo d'urto è sempre costituito da due particelle (o una sola per un decadimento). Nel secondo si ricaverà l'impulso e l'energia di una particella nel sistema di riposo di un'altra: questo caso è di particolare interesse per un decadimento, ma costituirà anche il passo intermedio per il terzo esempio. Quest'ultimo è indirizzato al calcolo degli impulsi ed energia di due particelle nel loro sistema di centro di massa. È un caso che si applica a quei processi con due sole particelle nello stato finale, ma è la base per tutti gli altri casi. Infatti solo in questo caso lo stato finale è univocamente determinato: negli altri ci sono gradi di libertà ulteriori. Il trattamento di molte particelle nello stato finale viene trattato nei metodi di *calcolo dello spazio delle fasi*.

Figura 1.3: Illustrazione della trasformazione dal **Lab** al **CM**.

Da questo punto, per rendere più snella la presentazione, adotteremo il sistema di unità che pone $\underline{c} = 1$. Questo sistema, di uso comune nella fisica delle particelle, fa parte del sistema delle cosiddette *unità naturali*, $\underline{h} = \underline{c} = 1$, di cui si può trovare descrizione e motivazioni nella maggior parte dei testi di fisica particellare. Poiché qui si tratta solo di cinematica relativistica, non daremo le regole di conversione tra unità come C.G.S. o M.K.S. e le unità naturali. Per i nostri scopi basterà attenersi alle seguenti regole:

- Nel sistema di unità naturali il quadrimpulso diventa $P = \{E, \mathbf{P}\}$ e la sua relazione di dispersione³ $\mathbf{P}^2 + M^2 = E^2$, M essendo la massa della particella.
- Una volta scelta l'unità di energia da utilizzare, ad es. GeV, allora le masse vanno espresse in GeV/c² e gli impulsi in GeV/c.

1.3.1 Il sistema del centro di massa (CM)

Supponiamo di avere nel sistema di riferimento del laboratorio (**Lab**) due particelle con quadrimpulsi p_1 e p_2 e masse m_1 e m_2 . Si avrà:

$$p_1 = \{\epsilon_1, \mathbf{p}_1\}, \quad p_2 = \{\epsilon_2, \mathbf{p}_2\}$$

con $p_1^2 = m_1^2$ e $p_2^2 = m_2^2$. Cosa è il sistema del *centro di massa*⁴ (**CM**)? Denotando con asterisco le quantità nel **CM**, questo è il sistema in cui (vedi fig. 1.3):

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0 \tag{1.8}$$

e quindi:

$$p_1^* + p_2^* = \{\epsilon_1^* + \epsilon_2^*, \mathbf{0}\}$$

Dall'invarianza di $P = p_1 + p_2 = \{\epsilon_1 + \epsilon_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\}$ si ottiene:

$$E^{*2} = (\epsilon_1^* + \epsilon_2^*)^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$$

³Così viene comunemente chiamata la relazione che lega energia, impulso e massa.

⁴Il sistema dovrebbe chiamarsi in modo più appropriato *centro dell'impulso*, e così si chiama effettivamente in inglese *center of momentum*. Il termine centro di massa, pur se inesatto, è diventato d'uso comune.

E^* è l'energia nel **CM**. Possiamo definire la massa totale (detta anche *massa invariante*) M del sistema attraverso il quadrato del suo quadrimpulso totale P ,

$$P^2 = (p_1 + p_2)^2 = M^2 = E^{*2} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \text{invariante} \quad (1.9)$$

quindi, dal punto di vista cinematico, *il sistema delle due particelle è equivalente a una sola “particella” di quadrimpulso P e massa $M = E^*$* . Ma allora facendo uso della (1.7) per P , possiamo scrivere:

$$\mathbf{P} = M\gamma\boldsymbol{\beta}, \quad E = M\gamma$$

dove $\boldsymbol{\beta}$ e γ sono rispettivamente la velocità e il fattore di Lorentz della “particella” nel **Lab**.

Indicando in modo più esplicito con il pedice CM tali grandezze, otteniamo la velocità e il fattore di Lorentz da utilizzare per trasformare dal **Lab** al **CM**:

$$\boldsymbol{\beta}_{CM} = \frac{\mathbf{P}}{E} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad \gamma_{CM} = \frac{E}{M} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2}} \quad (1.10)$$

1.3.2 Energia, impulso e velocità di una particella nel sistema di riposo di un'altra

Si consideri il caso mostrato in fig. 1.4. Si vogliono calcolare energia, impulso e velocità della particella 2 nel sistema in cui la 1 è in quiete, **RF**₁.

Indicando con p_1 e p_2 i quadrimpulsi delle due particelle, sappiamo che il loro prodotto scalare $p_1 p_2$ è un invariante relativistico. Nel sistema **RF**₁ i due quadrimpulsi avranno componenti:

$$p_1 = \{m_1, \mathbf{0}\}, \quad p_2 = \{E_{2,1}, \mathbf{p}_{2,1}\}$$

Quindi:

$$p_1 p_2 = m_1 E_{2,1} \implies E_{2,1} = \frac{p_1 p_2}{m_1}$$

Usando infine la relazione $|\mathbf{p}_{2,1}|^2 = E_{2,1}^2 - m_2^2$, si ottengono le variabili richieste:

$$\begin{cases} E_{2,1} = \frac{p_1 p_2}{m_1} \\ |\mathbf{p}_{2,1}|^2 = \frac{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{m_1^2} \\ \beta_{2,1}^2 = \frac{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2} \end{cases} \quad (1.11)$$

Dovendo utilizzare le (1.11) avendo a disposizione le quantità nel **Lab**, basta esprimere il prodotto scalare come $p_1 p_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$.

1.3.3 Energia e impulso di una particella nel sistema del centro di massa

Sempre riferendoci alla fig. 1.3, vogliamo ora calcolare le grandezze cinematiche delle particelle 1 e 2 nel sistema del **CM**. Come abbiamo osservato nel par. 1.3.1, la trasformazione che porta al **CM** è equivalente a quella che porta al sistema di riposo della “particella

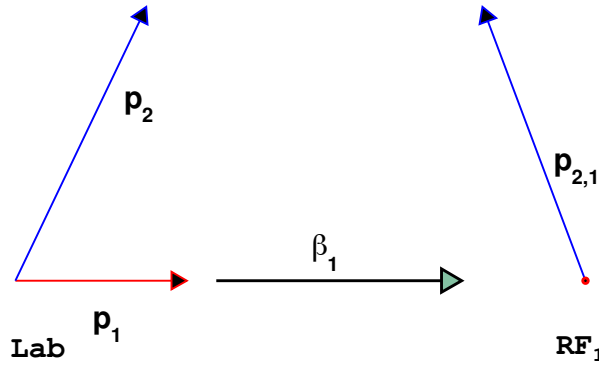


Figura 1.4: Trasformazione dal **Lab** al sistema di riposo della particella 1 **RF₁**.

centro-di-massa” il cui quadrimpulso è $P = p_1 + p_2$. Possiamo quindi utilizzare il risultato del paragrafo precedente, effettuando le seguenti sostituzioni:

$$p_1 \rightarrow P, \quad p_2 \rightarrow p_i \quad (i = 1, 2)$$

Quindi si ha:

$$\begin{cases} \epsilon_i^* = \frac{Pp_i}{M} \\ |\mathbf{p}_i^*|^2 = \frac{(Pp_i)^2 - M^2 m_i^2}{M^2} \\ \beta_i^{*2} = \frac{(Pp_i)^2 - M^2 m_i^2}{(Pp_i)^2} \end{cases} \quad (1.12)$$

Si ha allora:

$$Pp_i = (p_1 + p_2)p_i = p_1 p_2 + p_i^2 = p_1 p_2 + m_i^2$$

ma

$$p_1 p_2 = \frac{1}{2}[(p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2] = \frac{1}{2}[M^2 - m_1^2 - m_2^2]$$

e quindi:

$$Pp_i = \frac{1}{2}[M^2 + m_i^2 - m_j^2] \quad (i = 1, 2; j = 1, 2; j \neq i)$$

Le energie nel **CM** risultano infine:

$$\epsilon_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \epsilon_2^* = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \quad (1.13)$$

Si noti che risulta $\epsilon_1^* + \epsilon_2^* = M$, come deve essere.

Analogamente, sostituendo Pp_i nella seconda delle (1.12), si ottiene:

$$|\mathbf{p}^*|^2 = |\mathbf{p}_1^*|^2 = |\mathbf{p}_2^*|^2 = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2} \quad (1.14)$$

1.4 Conseguenze, applicazioni ed esercizi

1.4.1 Alcuni esercizi sul CM

1. Dimostrare che effettuando una trasformazione di Lorentz al CM, si ottiene $\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0$.

Usiamo la trasformazione generale (1.2) per gli impulsi, tenendo presente che $\mathbf{K}'$ va sostituito con $\mathbf{K}^*$. A noi interessa la trasformazione inversa (grandezze con * in funzione di quelle senza), per cui occorre cambiare $\boldsymbol{\beta}$ con $-\boldsymbol{\beta}$ e scambiare le variabili. Si ha:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \boldsymbol{\beta}\gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}(-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}) + \epsilon \right) = \mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}\gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p} - \epsilon \right)$$

dove $\boldsymbol{\beta}$ è dato da (1.10) (per semplicità omettiamo il pedice CM). Si ha allora:

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \boldsymbol{\beta}\gamma \left[\frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \right]$$

Sostituendo $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ con $\boldsymbol{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ (1.10), si ottiene:

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = \boldsymbol{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^2 - \gamma \right) = 0$$

in quanto è immediato verificare che la quantità tra parentesi è identicamente nulla.

2. *Nei nuclei i nucleoni sono in movimento e hanno una energia cinetica tipica dell'ordine di 20 MeV. Studiare gli effetti cinematici di questo movimento quando protoni di energia cinetica di 200 GeV urtano i nucleoni. Si considerino i casi in cui i nucleoni siano rispettivamente paralleli e antiparalleli ai protoni del fascio. Si assuma la massa dei nucleoni $m_n \simeq 1 \text{ GeV}/c^2$. Calcolare: a) qual è la differenza di energia nel CM; b) quale energia dovrebbero avere i protoni incidenti per produrre la stessa energia nel CM se urtassero nucleoni a riposo.*

I due casi parallelo e antiparallelo corrispondono ai quadrimpulsi totali:

$$\{E_p + E_n, p_p + p_n, 0, 0\}, \quad \{E_p + E_n, p_p - p_n, 0, 0\}$$

avendo indicato con pedice p il protone e n il nucleone e assunta la direzione dei protoni lungo l'asse x . Il quadrato dell'energia nel **CM** risulta quindi:

$$\begin{aligned} E^{*2} &= (E_p + E_n)^2 - (p_p \pm p_n)^2 = E_p^2 + E_n^2 + 2E_p E_n - p_p^2 - p_n^2 \mp 2p_p p_n = \\ &= m_p^2 + m_n^2 + 2E_p E_n \mp 2\sqrt{(E_p^2 - m_p^2)(E_n^2 - m_n^2)} \end{aligned}$$

a) Sostituendo $m_p = m_n = 1 \text{ GeV}/c^2$, $E_p = T_p + m_p = 201 \text{ GeV}$ e $E_n = T_n + m_n = 1.02 \text{ GeV}$ e quindi:

$$E^{*2} = 2(1 + 201 \times 1.02 \mp 40.4) = \begin{cases} 331.24 \text{ GeV}^2 & \text{para} \\ 492.84 \text{ GeV}^2 & \text{anti} \end{cases}$$

Pertanto l'energia nel **CM** sarà 18.2 GeV nel caso parallelo e 22.2 GeV nel caso antiparallelo. Si noti che i nucleoni nel **Lab** aggiungono all'energia cinetica una variazione dell'ordine di 10^{-4} e questo si traduce in una variazione di energia nel **CM** del 20% !

b) Si vuol trovare l'energia E'_p su nucleone fermo che produce la stessa E^* . Basta effettuare nella formula che dà E^{*2} le seguenti sostituzioni: $E_p \rightarrow E'_p$, $E_n \rightarrow m_n$. Si ha allora:

$$E^{*2} = 2(E'_p + 1) \implies E'_p = \begin{cases} 165 \text{ GeV} & \text{para} \\ 245 \text{ GeV} & \text{anti} \end{cases}$$

Anche in questo caso si ha un effetto enorme, circa il 40% !

1.4.2 Esempi di decadimenti in due corpi

1. Decadimento del pione nel CM, nel suo modo principale.

Si tratta di un decadimento in due corpi: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Le masse sono rispettivamente $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ e $m_\nu = 0$. Lo spettro è una riga con impulso dato da (1.14):

$$|\mathbf{p}_\mu^*| = |\mathbf{p}_\nu^*| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \simeq \frac{140^2 - 106^2}{2 \cdot 140} \simeq 30 \text{ MeV}/c$$

2. Decadimento $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ nel CM.

Anche in questo caso, lo spettro nel **CM** è una riga con impulso dato da (1.14):

$$|\mathbf{p}_p^*|^2 = |\mathbf{p}_\pi^*|^2 = \frac{[M_\Lambda^2 - (m_p + m_\pi)^2][M_\Lambda^2 - (m_p - m_\pi)^2]}{4M_\Lambda^2},$$

con $M_\Lambda = 1116 \text{ MeV}/c^2$, $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, si ottiene:

$$|\mathbf{p}_p^*| = |\mathbf{p}_\pi^*| \simeq 101 \text{ MeV}/c \quad (1.15)$$

1.4.3 Soglia di una reazione

Osservando la (1.14) si riconosce facilmente che, poiché $|\mathbf{p}^*|^2$ è definito positivo deve allora aversi:

$$M \geq m_1 + m_2$$

In altre parole, la condizione “di buon senso” che tutti noi applicheremmo cioè che la massa finale deve essere inferiore a quella iniziale, in effetti si applica, ma la massa iniziale da considerare non è la somma di quelle delle particelle iniziali, ma la *massa invariante* del sistema. La condizione sopra esposta definisce la *soglia di una reazione*. In modo più generale questa si può esprimere nel seguente modo:

$$P^2 = (p_1 + p_2)^2 \geq \left(\sum_{f=1}^{N_{fin}} m_f \right)^2 \quad (1.16)$$

Nella disequazione data p_1 e p_2 si riferiscono agli stati iniziali della reazione, mentre al secondo membro l'indice f (usato per essere più espliciti) si riferisce agli stati finali.

Discutiamo ora alcuni esempi concreti per meglio comprendere l'uso della (1.16).

1. Soglia della fotoproduzione del pione neutro $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$

La reazione si realizza con un fascio di fotoni su un bersaglio. Consideriamo i protoni del bersaglio fermi. La (1.16) diventa:

$$(p_\gamma + p_p)^2 = (E_\gamma + m_p)^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = m_p(2E_\gamma + m_p) \geq (m_p + m_{\pi^0})^2$$

dove si è utilizzato il fatto che il fotone ha massa nulla. Le altre masse sono $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ e $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$. Si ha allora:

$$E_\gamma \geq E_\gamma^{(s)} = \frac{(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2}{2m_p} = 145 \text{ MeV}$$

2. *Soglia della reazione al collider $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$*

In questo caso il sistema del **Lab** coincide con quello del **CM**. Infatti nella macchina circolano due fasci e^+ e e^- con impulsi uguali e contrari. Sia E l'energia dei due fasci, con $E \gg m_e$, la condizione di soglia (1.16) si ha allora per:

$$(p_{e^+} + p_{e^-})^2 = (2E^{(s)})^2 = (m_\mu + m_\mu)^2$$

Cioè

$$E^{(s)} = m_\mu = 106 \text{ MeV}$$

Nel caso di esperimenti su bersaglio fisso, in cui si possa considerare l'impulso della particella bersaglio ferma, l'espressione della soglia acquista una forma di uso immediato se espressa con l'energia cinetica. Esprimendo la reazione come $p + B \rightarrow 1 + 2 + \dots N_{fin}$, dove p indica la particella incidente, "proiettile", e B quella "bersaglio", si ha:

$$P^2 = (E_p + m_B)^2 - \mathbf{p}_p^2 = m_p^2 + m_B^2 + 2m_B E_p = (m_p + m_B)^2 + 2m_B T_p$$

per lo stato iniziale e

$$= \left(\sum_{f=1}^{N_{fin}} E_f^* \right)^2 = \left(\sum_{f=1}^{N_{fin}} [T_f^* + m_f] \right)^2 \geq \left(\sum_{f=1}^{N_{fin}} m_f \right)^2$$

per quello finale.

La condizione di uguaglianza corrisponde alla soglia, in cui tutte le energie cinetiche sono nulle (particelle create ferme nel **CM**). Quindi:

$$T_p \geq T_p^{(s)} = \frac{(\sum m_f)^2 - (m_p + m_B)^2}{2m_B} \quad (1.17)$$

Si vede in modo esplicito che si ha una soglia ogni volta che la somma delle masse finali è maggiore alla somma di quelle iniziali.

1. *Soglia della produzione di coppie $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$*

La creazione di coppie e^+e^- si ha quando fotoni di energia sufficientemente elevata passano in un materiale di spessore adeguato. Il mezzo è costituito da atomi aventi nuclei N .

Si noti anzitutto che la creazione di coppie non può avvenire nel vuoto. Infatti, nel caso $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$, si ha:

$$P_{ini}^2 = 0 \neq P_{fin}^2 = (E_{e^+}^* + E_{e^-}^*)^2 \geq (2m_e)^2$$

Invece la reazione è possibile se interviene un nucleo. Si ha infatti, usando la (1.17):

$$T_\gamma^{(s)} = E_\gamma^{(s)} = \frac{(M + 2m_e)^2 - M^2}{2M}$$

Si noti che $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ mentre un nucleo ha massa dell'ordine di $Am_n \simeq A \times 1000 \text{ MeV}/c^2$, dove con A si è indicato il numero di massa del nucleo e m_n la massa del nucleone generico (protone o neutrone). Quindi essendo $M \gg m_e$, abbiamo:

$$E_\gamma^{(s)} \simeq 2m_e \simeq 1 \text{ MeV}$$

2. Soglia della produzione di antiprotoni $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$

Questa è la reazione minima per la produzione di antiprotoni con un fascio di protoni incidenti su bersaglio fisso. L'antiprotone, come tutte le antiparticelle, ha la stessa massa del protone, $m_p = m_{\bar{p}} = 0.940 \text{ GeV}/c^2$. Dalla (1.17) si ha:

$$T_p^{(s)} = \frac{(4m_p)^2 - (2m_p)^2}{2m_p} = 6m_p \simeq 5.6 \text{ GeV}$$

1.4.4 Angolo di apertura in un decadimento in due corpi

Si consideri il decadimento nel **Lab** di una particella di massa M in due particelle a e b . Si vuol determinare l'angolo tra a e b . Indicando con θ tale angolo, si ha, con le solite notazioni:

$$P^2 = M^2 = (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b - 2|\mathbf{p}_a||\mathbf{p}_b|\cos\theta$$

e quindi

$$\cos\theta = \frac{m_a^2 + m_b^2 - M^2 + 2E_a E_b}{2|\mathbf{p}_a||\mathbf{p}_b|}$$

Questa espressione si semplifica nel caso in cui a e b siano entrambe ultrarelativistiche, cioè $E_a \gg m_a$ e $E_b \gg m_b$. Infatti, in questo caso si ha:

$$\cos\theta = \frac{m_a^2 + m_b^2 - M^2}{2E_a E_b} + 1$$

e quindi, essendo $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, si ottiene:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{4E_a E_b}}$$

Se E è l'energia della particella che decade nel **Lab**, indicando con E' l'energia di a , si ha $E_b = E - E'$ e quindi si può esprimere l'angolo di apertura in funzione solo di E e E' :

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{4E'(E - E')}}}$$

Ci si può allora chiedere come tale angolo varia con E' , fisso E . In particolare tale funzione ha un minimo. Infatti:

$$\frac{\partial \sin(\theta/2)}{\partial E'} = 0 \quad \text{per} \quad E' = \frac{E}{2}$$

(è facile verificare che si tratta di un minimo). Quindi:

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)_{min} = \frac{\sqrt{M^2 - m_a^2 - m_b^2}}{E}$$

Ad esempio, considerando il decadimento di un pione neutro ($M = 135 \text{ MeV}/c^2$)

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

avente energia di 1 GeV , si ha:

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)_{min} = \frac{m_{\pi^0}}{E} = 0.135$$

cioè $\theta_{min} \simeq 16^\circ$.

1.5 Cambiamento dello spettro d'impulsi dal CM al Lab

In questo paragrafo vogliamo sviluppare un metodo grafico (talora chiamato il “metodo delle ellissi”) che permette facili considerazioni su quello che ci possiamo aspettare nel **Lab** nel caso di una reazione nota. Le considerazioni che faremo si applicano al caso di due sole particelle nello stato finale.

Formuliamo il problema nel seguente modo:

Data una reazione in cui una particella incide nel **Lab** su un bersaglio fisso, note le masse delle particelle e l'energia della particella incidente, sappiamo tutto di quello che accade nel **CM**. Infatti le particelle finali saranno emesse con impulsi uguali e contrari dati dalla (1.14) ed energie date dalla (1.13). Queste variabili dipendono solo *dalle masse finali e dalla massa invariante (cioè l'energia nel CM)*. Supponendo di studiare in particolare una delle due particelle, possiamo dire che una misura del suo *spettro* (cioè la distribuzione delle energie o impulsi) nel **CM** darà come risultato *una riga*. La distribuzione angolare sarà invece, in assenza di effetti dinamici⁵, isotropa. Ci domandiamo allora:

Cosa ci possiamo aspettare nel **Lab**?

Quale sarà lo spettro?

Come si distribuiranno gli angoli di diffusione?

Che corrispondenza ci sarà tra angoli e impulsi?

Partiamo dal **CM**. In questo sistema la particella in oggetto avrà impulso dato dalla (1.14) e distribuzione angolare isotropa, quindi impulsi ed angoli sono totalmente disaccoppiati. Possiamo rappresentare gli stati possibili della particella nello spazio degli impulsi come il luogo dei vettori $\mathbf{p}^*$ la cui punta si muove sulla superficie sferica (vedi fig. 1.5):

$$\frac{p_x^{*2}}{p^{*2}} + \frac{p_y^{*2}}{p^{*2}} + \frac{p_z^{*2}}{p^{*2}} = 1 \quad (1.18)$$

avendo indicato con p^* la radice quadrata⁶ della (1.14).

Supponiamo che la trasformazione dal **CM** al **Lab** avvenga lungo l'asse x . Indicando con β e γ la velocità e il fattore di Lorentz della trasformazione, gli impulsi si trasformeranno come:

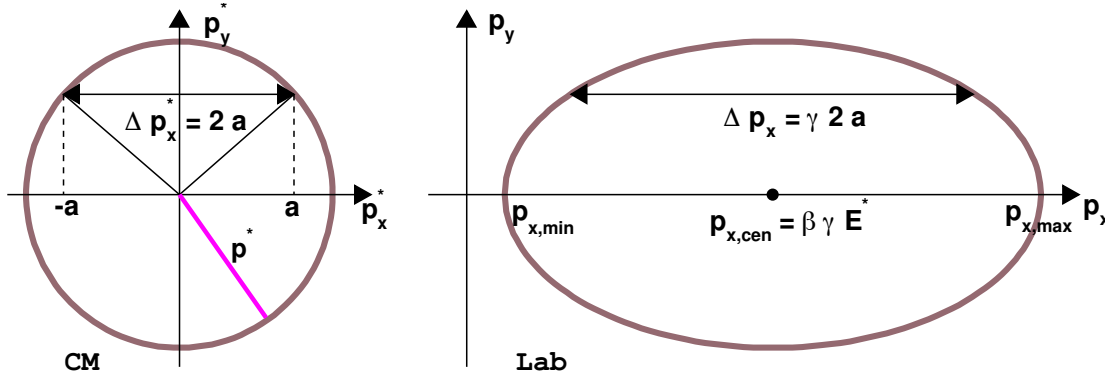
$$p_x = \gamma(p_x^* + \beta E^*), \quad p_y = p_y^*, \quad p_z = p_z^* \quad (1.19)$$

dove E^* è l'energia della particella in oggetto.

Considerato qualsiasi valore $p_x^* = a$ con $0 \leq a \leq p^*$ esiste un valore uguale ed opposto $p_x^* = -a$. La differenza tra questi due valori è $\Delta p_x^* = 2a$. Se trasformiamo nel **Lab** questi

⁵Nel sistema del **CM** non esiste alcuna direzione associata agli impulsi iniziali in quanto questi si annullano. Il sistema non può quindi “ricordare” alcuna direzione privilegiata. Differente è se ci sono direzioni associate a gradi di libertà interni delle particelle (ad es. spin) e se la dinamica (cioè l'interazione) dipende da queste.

⁶In questo paragrafo, in cui non useremo esplicitamente quadri-vettori, p^* indica il modulo del tri-vettore $\mathbf{p}^*$ e non va quindi confuso con un quadri-vettore.

Figura 1.5: Trasformazione degli impulsi dal **CM** al **Lab**.

valori, otteniamo che la stessa differenza si trasforma in $\Delta p_x = \gamma 2a = \gamma \Delta p_x^*$. Facendo lo stesso ragionamento su y e z si ottiene invece che $\Delta p_y = \Delta p_y^*$ e $\Delta p_z = \Delta p_z^*$. Pertanto la superficie sferica si trasforma in un ellissoide di rotazione in cui gli assi p_y e p_z non cambiano, mentre l'asse p_x è dilatato per il fattore di Lorentz. Tale ellissoide avrà quindi semiassi:

$$a_x = \gamma p^* \quad a_y = p^*, \quad a_z = p^*$$

Nello spazio degli impulsi del **Lab** il centro, $p_{x,min}^* = -p^*$ e $p_{x,max}^* = p^*$ corrispondono a:

$$p_{x, cen} = \beta \gamma E^*, \quad p_{x, min} = \gamma(-p^* + \beta E^*), \quad p_{x, max} = \gamma(p^* + \beta E^*)$$

pertanto l'equazione dell'ellissoide, trasformato della sfera (1.18) sarà:

$$\frac{(p_x - \beta \gamma E^*)^2}{\gamma^2 p^{*2}} + \frac{p_y^2}{p^{*2}} + \frac{p_z^2}{p^{*2}} = 1 \quad (1.20)$$

Si noti che l'equazione dell'ellissoide dipende dai parametri della trasformazione di Lorentz (β, γ) , che sono *parametri del sistema*, e da *parametri della particella* (p^*, E^*) considerata. Infatti, seppure p^* è uguale per le due particelle, la presenza di E^* (che dipende dalla massa della particella) fa sì che l'ellissoide (1.20) sia differente per le particelle finali.

L'ellissoide tocca il piano $p_x = 0$ se

$$p_{x, min} = \gamma(-p^* + \beta E^*) = \gamma p^* \left(\frac{\beta}{\beta^*} - 1 \right) = 0 \quad \implies \quad \beta = \beta^*$$

cioè se la velocità della trasformazione **CM** $\rightarrow$ **Lab** è uguale alla velocità della particella nel **CM** $\beta^* = p^*/E^*$. Quindi a seconda della relazione tra β e β^* si possono avere tre casi:

- $\beta < \beta^*$: l'ellissoide taglia il piano $p_x = 0$, per cui sono possibili anche $p_x < 0$.
- $\beta = \beta^*$: l'ellissoide è tangente al piano $p_x = 0$, per cui si ha $p_x \geq 0$.
- $\beta > \beta^*$: l'ellissoide si trova a destra del piano $p_x = 0$ e p_x è sempre positivo.

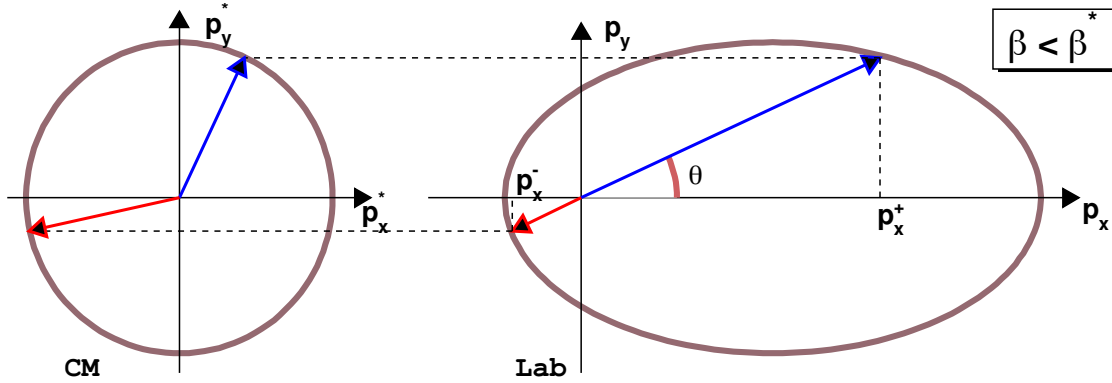


Figura 1.6: Trasformazione degli impulsi dal **CM** al **Lab**. Caso $\beta < \beta^*$.

1.5.1 Angolo limite nel Lab

Per una più facile comprensione poniamo $p_z = 0$. Questo può sempre realizzarsi con una rotazione intorno all'asse p_x . Pertanto senza limitare la generalità della trattazione, il problema può essere trattato nel piano (p_x, p_y) e nel corrispondente (p_x^*, p_y^*) . Con la scelta fatta l'angolo di diffusione nel **Lab** si ottiene da:

$$p_y = p_x \tan \theta$$

Con questa e $p_z = 0$, la (1.20) diventa:

$$\frac{(p_x - \beta \gamma E^*)^2}{\gamma^2 p^{*2}} + \frac{p_x^2 \tan^2 \theta}{p^{*2}} = 1$$

che ha per soluzione:

$$p_x^\pm = \frac{\beta \gamma E^* \pm \sqrt{\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - (1 + \gamma^2 \tan^2 \theta)(\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - \gamma^2 p^{*2})}}{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta} \quad (1.21)$$

Il discriminante dell'equazione è:

$$\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - (1 + \gamma^2 \tan^2 \theta)(\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - \gamma^2 p^{*2}) = \gamma^2 E^{*2} [\beta^{*2} - \gamma^2 \tan^2 \theta (\beta^2 - \beta^{*2})]$$

Se $\beta < \beta^*$ il secondo addendo è positivo come il primo. Questo significa che per $\beta < \beta^*$ esistono *sempre due soluzioni*, $p_x^\pm$ (vedi fig. 1.6), qualunque sia il valore dell'angolo θ . Se invece $\beta > \beta^*$ il discriminante è positivo per

$$\tan^2 \theta \leq \frac{\beta^{*2}}{\gamma^2 (\beta^2 - \beta^{*2})} \quad (1.22)$$

e si avranno *due soluzioni* solo quando la (1.22) è soddisfatta. Questo significa che esiste un *angolo limite nel Lab*:

$$\tan^2 \theta_{\max} = \frac{\beta^{*2}}{\gamma^2 (\beta^2 - \beta^{*2})} \quad (1.23)$$

tale che solo per $\theta < \theta_{\max}$ esistono *due soluzioni*, $p_x^\pm$. In corrispondenza dell'angolo limite le due soluzioni coincidono e l'impulso è *tangente* all'ellisse (vedi fig. 1.7).

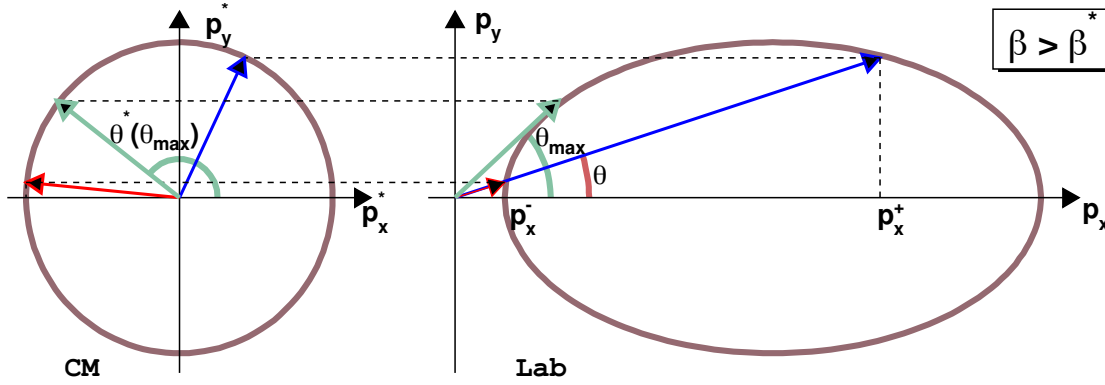


Figura 1.7: Trasformazione degli impulsi dal **CM** al **Lab**. Caso $\beta > \beta^*$. Si noti l'angolo limite θ_{max} nel **Lab**.

Infine possiamo calcolare l'angolo $\theta^*(\theta_{max})$ che corrisponde nel **CM** all'angolo limite. Dividendo p_y per p_x nella (1.19) si ottiene la relazione tra gli angoli nei due sistemi:

$$\tan\theta = \frac{\beta^* \sin\theta^*}{\gamma(\beta^* \cos\theta^* + \beta)}$$

Risolvendo in $\cos\theta^*$, si ottiene:

$$\cos\theta^*(\theta_{max}) = -\frac{\beta^*}{\beta} \quad (1.24)$$

Si noti che l'angolo è sempre nell'emisfero all'indietro ($\cos < 0$) ed è possibile solo nel caso $\beta > \beta^*$, consistentemente con quanto detto sopra.

1.5.2 Metodo grafico delle ellissi

Le precedenti considerazioni permettono di tradurre quanto ottenuto fin qui in un metodo grafico di facile utilizzo. Si considerino le equazioni (1.19) insieme alla condizione $p_z = 0$, (cioè le prime due, solamente) per trattare tutto nel piano. Queste equazioni corrispondono ad una *trasformazione biunivoca* tra i punti del piano (p_x, p_y) e quelli del piano (p_x^*, p_y^*) . Si può verificare (e in parte l'abbiamo già fatto) che questa trasformazione cambia le rette in rette e le circonferenze in ellissi con assi orientati lungo le coordinate. Nota la situazione nel **CM** diventa allora facile trovare l'*ellisse corrispondente* ad una delle particelle dello stato finale nel **Lab**: bastano i parametri della trasformazione (β e/o γ , che dipendono solo dallo *stato iniziale*) e la massa della particella. Una volta ricavata l'ellisse è immediato dedurre se ci sono limiti cinematici agli angoli (angolo limite) e trovare anche la corrispondenza tra gli angoli. Basta infatti osservare che ad un dato angolo nel **Lab**, i due impulsi possibili si ricavano facilmente dalla lunghezza della congiungente l'origine di (p_x, p_y) con il punto di intersezione con l'ellisse. Tale procedura non è ambigua: infatti delle possibili due soluzioni quella corrispondente al segno + (-) nella (1.21) si trova nel **CM** nell'emisfero $\theta^* < 90^\circ$ ($\theta^* > 90^\circ$) e viceversa⁷.

⁷Si osservi che, nel caso $\beta < \beta^*$ alle due soluzioni vanno associati nel **Lab** angoli supplementari (vedi fig. 1.6). Questi infatti hanno uguale valore del quadrato della tangente nella (1.21).

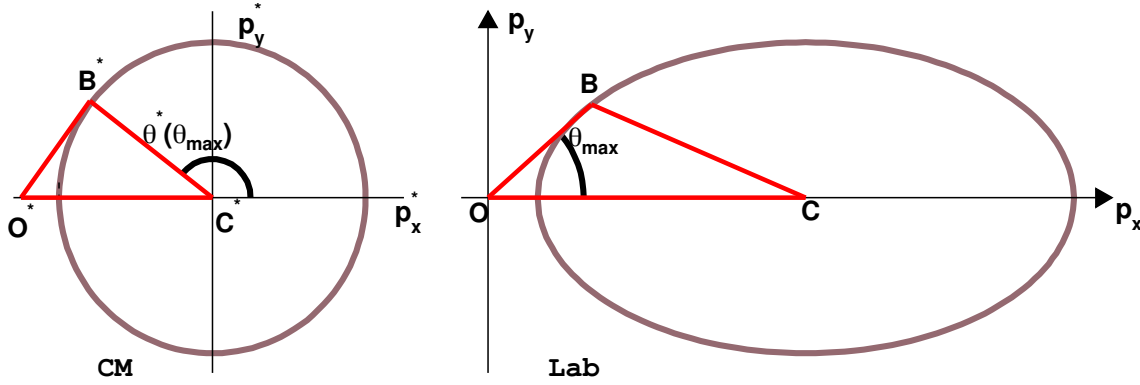


Figura 1.8: Corrispondenza tra **CM** e **Lab** nel calcolo di $\theta^*(\theta_{max})$ con il metodo delle ellissi.

Per dimostrare l'efficacia di questo metodo, possiamo applicarlo per ricavare la (1.24). Facendo uso delle (1.19), si ricava che il punto trasformato dell'origine O di (p_x, p_y) è O^* di coordinate $(-\beta E^*, 0)$ nel **CM** (vedi fig. 1.8). Il segmento OB corrispondente all'impulso tangente (avente θ_{max}) si trasforma nel segmento O^*B^* , il quale è ortogonale al raggio C^*B^* , essendo tangente alla circonferenza (la proprietà di tangenza è mantenuta tra **Lab** e **CM**). Considerato il triangolo $O^*B^*C^*$ (retto in B^*) si ha quindi:

$$\beta E^* \cos[\pi - \theta^*(\theta_{max})] = p^*$$

in quanto $O^*C^* = \beta E^*$ e $C^*B^* = p^*$. Da questa relazione si ricava proprio la (1.21).

1.5.3 Applicazioni del metodo delle ellissi

I. Un esercizio sull'angolo limite

L'esercizio (prova scritta A.A. 1998-99 del Corso di Istituzioni di Fisica Nucleare, C.d.L. Fisica, Università dell'Aquila) mostra come la semplice cinematica può determinare alcuni dei parametri di disegno di un rivelatore di particelle.

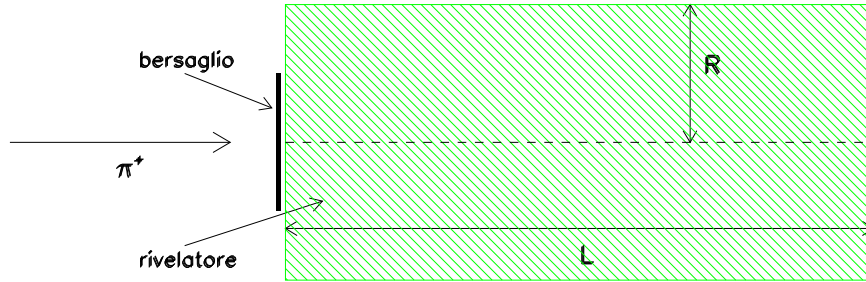
Esercizio: Si intende studiare il decadimento dell'iperone Σ^+ con un "tracciatore" (un rivelatore ad alta risoluzione spaziale di particelle ionizzanti, ad es. camera a bolle, camera a drift, etc.). Le Σ^+ sono prodotte nella reazione:



($m_\pi = 0.1396 \text{ GeV}/c^2$, $m_p = 0.9383 \text{ GeV}/c^2$, $m_\Sigma = 1.189 \text{ GeV}/c^2$, $m_K = 0.4937 \text{ GeV}/c^2$) con un fascio di π^+ di impulso $p = 20 \text{ GeV}/c$ su un bersaglio sottile. Il rivelatore, schematizzabile come un cilindro di raggio R e lunghezza L , sarà posto immediatamente dopo il bersaglio (nel verso del fascio), con l'asse coincidente con la direzione del fascio stesso (vedi figura).

Senza tener conto della funzione di distribuzione del tempo di decadimento, si assuma che **tutte** le Σ^+ decadano entro un tempo pari a **3 volte** la vita media ($\tau_\Sigma = 0.799 \times 10^{-10} \text{ s}$).

Si chiede:



1. il nostro rivelatore è in grado di rivelare tutte le Σ^+ prodotte?
2. quale deve essere la minima dimensione longitudinale, L , perché il punto di decadimento sia contenuto nel rivelatore?
3. quale la minima dimensione del raggio, R ?
4. il nostro rivelatore è in grado di rivelare anche tutte le tracce di K^+ prodotte?
5. se non tutte sono rivelabili, quale ne è la frazione, assumendo che i kaoni siano emessi isotropicamente nel CM?

Soluzione: Iniziamo con il calcolo delle grandezze cinematiche rilevanti per il problema:

$$\epsilon_\pi = \sqrt{\mathbf{p}_\pi^2 + m_\pi^2} = \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} \simeq 20 \text{ GeV}/c$$

$$E^* = \sqrt{m_\pi^2 + m_p^2 + 2m_p\epsilon_\pi} \simeq 6.199 \text{ GeV}$$

$$\beta_{CM} = |\mathbf{p}_\pi|/(\epsilon_\pi + \epsilon_p) = p_\pi/(\epsilon_\pi + m_p) \simeq 0.955165$$

$$\gamma_{CM} = (\epsilon_\pi + \epsilon_p)/E^* \simeq 3.3775$$

$$p^* = |\mathbf{p}^*| = \sqrt{[E^{*2} - (m_\Sigma + m_K)^2][E^{*2} - (m_\Sigma - m_K)^2]} / (2E^*) \simeq 2.965 \text{ GeV}/c$$

1) Per rispondere a questa domanda, poiché il rivelatore accetta tracce di Σ^+ emesse tra 0° e 90° , basta verificare che esista un angolo limite per le Σ^+ .

$$\epsilon_\Sigma^* = \sqrt{p^{*2} + m_\Sigma^2} \simeq 3.194 \text{ GeV}$$

$$\beta_\Sigma^* = p^*/\epsilon_\Sigma^* \simeq 0.9281 < \underline{\beta_{CM}}$$

Pertanto esiste un angolo limite e quindi **tutte le Σ^+ sono rivelate**⁸.

2) Assumendo che tutte le Σ^+ decadano entro 3 vite medie, allora il loro punto di decadimento si troverà ad una distanza massima dal vertice di produzione:

$$D_\Sigma = 3 \cdot c\tau_\Sigma \cdot \beta_\Sigma \gamma_\Sigma = 3 \cdot c\tau_\Sigma \cdot p_\Sigma / m_\Sigma \simeq 6.05 \times p_\Sigma [GeV/c] \text{ cm},$$

nella direzione $\mathbf{p}_\Sigma / p_\Sigma$. È allora evidente che la lunghezza minima del tracciatore si ottiene quando $(p_\Sigma)_L$ è massimo, cioè quando $(p^*_\Sigma)_L = p^*$. Quindi:

$$\begin{aligned} (p_\Sigma)_L(max) &= \gamma_{CM} (p^* + \beta_{CM} \cdot \epsilon^*_\Sigma) \simeq 20.3 \text{ GeV}/c \implies \\ L &= 6.05 \times (p_\Sigma)_L(max) \text{ cm} \simeq 122.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

3) Analogamente al punto 2), si riconosce che il raggio minimo del tracciatore si ottiene quando $(p_\Sigma)_T$ è massimo, cioè quando $(p^*_\Sigma)_T = p^*$:

$$R = 6.05 \times (p_\Sigma)_T(max) = 6.05 \times p^* \text{ cm} \simeq 17.9 \text{ cm}$$

4) Analogamente al punto 1), occorre verificare che esista un angolo limite, questa volta, per i K^+ :

$$\begin{aligned} \epsilon_K^* &= \sqrt{p^{*2} + m_K^2} \simeq 3.006 \text{ GeV} \\ \beta_K^* &= p^* / \epsilon_K^* \simeq 0.9864 > \underline{\beta_{CM}} \end{aligned}$$

Pertanto **non** esiste un angolo limite e quindi **non tutti i K^+ possono essere rivelati**.

5) Per calcolare la frazione di K^+ rivelati, basta considerare che produrranno una traccia nel rivelatore i soli K^+ emessi con un angolo inferiore a 90° . L'angolo nel CM corrispondente a 90° nel Lab può essere ricavato dalla trasformazione di Lorentz della componente longitudinale $(p_K)_L = (p_K)_x = \gamma_{CM} ((p_K)_x + \beta_{CM} \cdot \epsilon_K^*)$, ponendo $(p_K)_x = 0$. Si ottiene allora:

$$(p_K^*)_x = p^* \cdot \cos\theta^*(90^\circ) = -\beta_{CM} \cdot \epsilon_K^* \implies$$

⁸Può essere utile, anche se non necessario per il problema, calcolare il valore dell'angolo limite e il suo corrispondente nel CM:

$$\begin{aligned} \tan\theta_{max} &= \beta_\Sigma^* / (\gamma_{CM} \sqrt{\beta_{CM}^2 - \beta_\Sigma^{*2}}) \simeq 1.217 \implies \theta_{max} \simeq 50.6^\circ \\ \cos\theta^*(\theta_{max}) &= -\beta_\Sigma^* / \beta_{CM} \simeq -0.9717 \implies \theta^*(\theta_{max}) \simeq 166^\circ \end{aligned}$$

All'angolo limite, l'impulso longitudinale, quello trasverso e quello totale sono:

$$\begin{aligned} (p_\Sigma)_L &= p_x = \gamma_{CM} (p^* \cdot \cos\theta^*(\theta_{max}) + \beta_{CM} \cdot \epsilon_\Sigma^*) \simeq 0.573 \text{ GeV}/c \\ (p_\Sigma)_T &= p_y = p_y^* = p^* \cdot \sin\theta^*(\theta_{max}) \simeq 0.700 \text{ GeV}/c \implies p_\Sigma \simeq 0.905 \text{ GeV}/c \end{aligned}$$

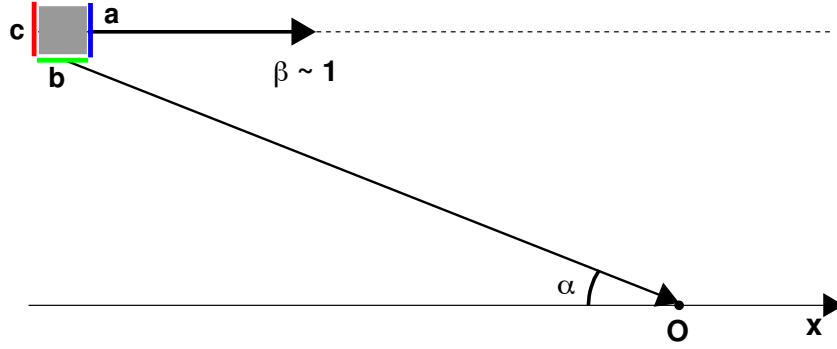


Figura 1.9: Oggetto in movimento veloce. α è l'angolo di vista.

$$f = \cos\theta^*(90^\circ) = -\beta_{CM} \cdot \epsilon_K^* / p^* = -\beta_{CM} / \beta_K^* \simeq -0.9683,$$

corrispondente ad un angolo di circa 165.5° .

La distribuzione nel CM, assunta isotropa, è data da $dN/d\Omega = 1/4\pi$ (normalizzata a 1). Quindi la frazione di K^+ rivelabili è:

$$r = 1/4\pi \int_0^{2\pi} d\phi \int_f^1 d\cos\theta^* = (1/2) \times (1 - f) \simeq 1.9683/2 \simeq 98.4\%$$

II. Come appare un oggetto in movimento veloce

Possiamo utilizzare il metodo delle ellissi per rispondere ad una domanda frequente: *Cosa vede un osservatore che guarda (o fotografa) un oggetto che si avvicina a lui con velocità relativistica ($\beta \approx 1$)?* Il richiamo più immediato porta alla *contrazione di Lorentz*: ci dobbiamo quindi aspettare di osservare l'oggetto con la sua dimensione longitudinale contratta e quelle trasversali invariate?

Per dare una risposta al quesito anzitutto cerchiamo di dare uno schema appropriato al fenomeno dell'osservazione. Per semplificare, assumiamo che l'oggetto sia di forma semplice, ad es. un cubo, che si muova parallelamente ad uno dei suoi lati. La fig. 1.9 mostra la proiezione dell'oggetto sul piano (x, y) , essendo la sua velocità orientata come x . In particolare, sono evidenziate tre facce (lati sul piano): b orientato lungo la direzione del moto e a e c ad essa ortogonali. Assumiamo ancora che l'oggetto emetta da ogni sua faccia luce isotropa e, sempre per semplicità monocromatica. L'osservazione dell'oggetto avverrà quindi attraverso i fotoni emessi che raggiungeranno l'osservatore in O . Per ogni posizione α rappresenta l'angolo di osservazione: la figura mostra ad es. l'emissione da un punto della faccia b di un fotone che sarà (successivamente) osservato in O ad un angolo α .

Per ogni punto di emissione dei fotoni lo spettro in impulso dei fotoni è rappresentato da impulsi che descrivono una semisuperficie sferica di raggio $p^* = h\nu^*$, essendo ν^* la frequenza della luce emessa nel sistema di riposo **RF** dell'oggetto. La semplice espressione per p^* deriva dal fatto che il fotone ha massa nulla (si ricordi $c = 1$!). Da tale fatto deriva anche che $\beta^* = 1$. L'osservatore si trova fermo in O nel sistema **Lab**. La trasformazione

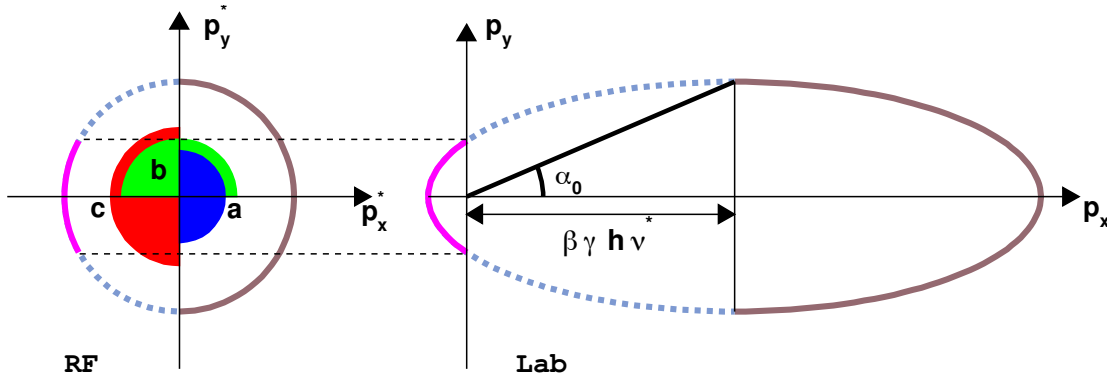


Figura 1.10: Metodo delle ellissi applicato al caso dell'oggetto in movimento veloce.

che porta da **RF** al **Lab** viene effettuata con una velocità β , uguale a quella dell'oggetto e diretta come x . Avremo quindi necessariamente che $\beta < \beta^*$, pertanto lo spettro di impulsi si trasforma come mostrato in fig. 1.10. Nella figura sono in particolare mostrate le porzioni della semicirconferenza (proiezione della semisuperficie) che interessa ciascun lato.

Osserviamo subito che l'emissione dalla faccia a (nella figura $-90^\circ < \theta^* < 90^\circ$) sarà vista nel **Lab** solo per angoli di osservazioni minori di α_0 , essendo

$$\alpha_0 \approx \tan \alpha_0 = \frac{h\nu^*}{\beta\gamma h\nu^*} = \frac{1}{\beta\gamma} \approx \sqrt{1 - \beta^2}$$

nel limite di velocità relativistiche $\beta \approx 1$. Pertanto la faccia a è visibile solamente fino all'angolo di vista α_0 !

La faccia b emette per angoli nel **RF** che vanno da avanti fino all'indietro, mentre la faccia c emette solo nell'emisfero all'indietro. Pertanto, per entrambe, una parte della luce emessa all'indietro nel **RF** viene ribaltata in avanti ad angoli compresi tra 90° e α_0 .

In conclusione l'osservatore vedrà come l'oggetto si avvicina:

- la faccia a da quando l'oggetto appare ($\alpha \approx 0$) fino ad un angolo $\alpha_0 \approx \sqrt{1 - \beta^2}$;
- la faccia b sempre;
- la faccia c a partire dall'angolo α_0 fino alla sua scomparsa.

Tutto questo produce l'effetto di un'apparente (per l'osservatore) *rotazione dell'oggetto*. Infatti l'osservazione del lato b anche ad angoli prossimi a 0 e ancor più la scomparsa della faccia anteriore ad angoli ancora piccoli come α_0 producono proprio l'effetto di una rotazione. A completare l'effetto c'è infine la comparsa della faccia posteriore sempre a piccoli angoli ($> \alpha_0$).

A questo comportamento "inaspettato" c'è da aggiungere l'effetto Doppler. Infatti la fig. 1.10 mostra anche che per la maggior parte degli angoli di osservazione in avanti l'impulso dei fotoni è maggiore di quello nel **RF**, e quindi $\nu > \nu^*$. Invece i fotoni osservati all'indietro hanno $\nu < \nu^*$. Quindi ammesso che l'emissione monocromatica fosse nel visibile osserveremmo l'oggetto che emette dalle facce a e b nell'ultravioletto (o lontano UV o X, a seconda di β) e alla fine dalle facce b e c nell'infrarosso.

A questo punto resta la domanda: *ma allora che cosa rappresenta la contrazione di Lorentz ?* La risposta è in effetti semplice: la contrazione di Lorentz non ha nulla a che vedere con l'osservazione. Infatti questa si realizza quando *le posizioni di due o più punti di un oggetto sono misurate simultaneamente*. E questo non è quello che accade nell'osservazione che viene invece effettuata attraverso fotoni che *raggiungono allo stesso tempo* l'osservatore. Questo significa anche che i fotoni che compongono l'osservazione *non lasciano l'oggetto allo stesso tempo*.

L'apparente rotazione degli oggetti prende il nome di “Terrell rotation”. Si possono trovare links utili nel sito Wikipedia. Un'animazione dell'effetto (senza effetto Doppler) è fornita dal video *MovingCubes.mpg* nel sito del corso.

Capitolo 2

Introduzione al calcolo dello spazio delle fasi

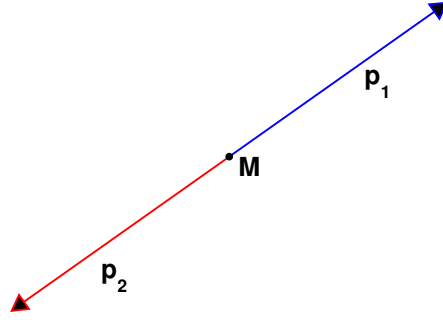
2.1 Lo studio degli stati finali su sole basi cinematiche

Lo studio della fisica nucleare e subnucleare procede attraverso la misura sperimentale delle sezioni d'urto (o rate di decadimento), per i processi considerati, e nel confronto con quelle calcolate sulla base di teorie o modelli che descrivono le interazioni fondamentali responsabili di detti processi. Le espressioni teoriche delle sezioni d'urto differenziali (o rate di decadimento) contengono in generale due termini: uno *dinamico* e uno *cinematico*. Il primo è legato alla probabilità di transizione tra lo stato iniziale e quello finale e dipende quindi dall'interazione (elettromagnetica, forte, debole) che determina tale transizione. Il secondo dipende invece dal “numero” degli stati quantici che sono disponibili per collocare le particelle che appaiono nello stato finale. Questo è ben riconoscibile ad esempio nella *regola d'oro di Fermi*, che si ricava in Meccanica Quantistica Non Relativistica (*MQNR*) dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo [1]:

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot [\rho(E)]_{E_f=E_i}. \quad (2.1)$$

In questa formula il termine dinamico è rappresentato dal modulo quadro dell'elemento di matrice $|\mathcal{M}_{fi}|^2$, mentre quello cinematico è la densità degli stati finali $\rho(E)$ o, più impropriamente, lo *spazio delle fasi*.

In queste pagine illustreremo, in un limitato numero di casi (peraltro i più frequenti), in che modo la cinematica relativistica fin qui studiata permetta di calcolare oppure, semplicemente, dare delle informazioni sullo spazio delle fasi. Questa è una trattazione estremamente semplificata, adatta ad un corso istituzionale, che non ha alcuna pretesa di essere rigorosa o esauriente, ma ha il solo scopo di dare il concetto di spazio delle fasi nei processi fisici più comunemente studiati. Per questo scopo, ci limiteremo ai soli due casi del *decadimento in due corpi* e *in tre corpi*. Con queste espressioni non si intendono soltanto gli effettivi casi di decadimento con 2 o 3 particelle nello stato finale, ma più generalmente quei casi in cui è disponibile una certa energia E^* nel **CM** e questa dà luogo a 2 o 3 particelle. Pertanto il caso è più generale dei soli decadimenti in cui la

Figura 2.1: Decadimento in due corpi nel sistema del **CM**.

particella che si disintegra ha massa $M = E^*$, comprendendo tutti quei processi in cui ad uno stato iniziale è associata un'energia nel **CM** E^* (ad es. particella a contro particella b in quiete: $E^{*2} = 2 \epsilon_a m_b + m_a^2 + m_b^2$, dove ϵ_a è l'energia totale di a nel **Lab**). *Tutte le considerazioni che seguiranno verranno svolte nel sistema del **CM*** (equivalente al sistema di riposo, nel caso dei decadimenti). Per semplicità, ometteremo, da questo momento, l'asterisco all'apice delle grandezze cinematiche ($\epsilon, p, \beta, \gamma$) delle singole particelle in tale sistema.

2.2 Decadimento in due corpi

Nel sistema del **CM** il decadimento in due corpi può essere schematizzato come in fig. 2.1. M rappresenta la particella che decade oppure l'energia nel **CM**, $E^* = M$, disponibile dallo stato iniziale. Rappresenteremo tale decadimento, in modo simbolico, denotando ogni particella con la corrispondente massa: $M \rightarrow m_1 + m_2$. La conservazione del quadrimpulso conduce alle seguenti equazioni nel **CM**:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad (2.2)$$

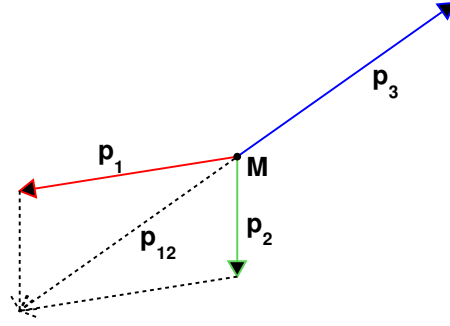
$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = M \quad (2.3)$$

Le relazioni che legano ϵ_1 , ϵ_2 e $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ alle masse in gioco M , m_1 e m_2 sono già state ricavate nel capitolo precedente:

$$\epsilon_1 = \frac{M^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2M} \quad \epsilon_2 = \frac{M^2 + (m_2^2 - m_1^2)}{2M} \quad (2.4)$$

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2} \quad (2.5)$$

Ne consegue che nel sistema del **CM** lo spettro in impulso è una riga (ovvero una delta di Dirac di argomento uguale a $|\mathbf{p}|$ meno il valore dato dalla radice quadrata dell'espressione (2.5)). In assenza di alcuna direzione privilegiata (ad es., particella con spin polarizzata), allora anche la distribuzione angolare è necessariamente isotropa e quindi la funzione di distribuzione $d^2N/dp d\Omega$ è totalmente *determinata dalla cinematica*.

Figura 2.2: Decadimento in tre corpi nel sistema del **CM**.

2.3 Decadimento in tre corpi

Nel sistema del **CM** il decadimento in tre corpi può essere schematizzato come in fig. 2.2: $M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$. In questo caso lo spettro in impulso di una qualsiasi particella non è completamente determinato dalla conservazione del 4-impulso. Infatti tale conservazione:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0 \quad (2.6)$$

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = M \quad (2.7)$$

conduce ad un'infinità di stati possibili, in quanto il numero di equazioni è inferiore al numero di variabili incognite. Ciò nonostante, le equazioni (2.6) e (2.7) impongono dei limiti cinematici alla distribuzione delle variabili in gioco.

Per trovare tali limiti basta rifarsi al caso precedente. In particolare, possiamo ricondurre il decadimento in tre corpi al seguente decadimento in due corpi:

$$M \rightarrow M_{12} + m_3$$

dove con M_{12} abbiamo indicato una particella virtuale di massa uguale alla massa invariante del sistema (1,2). Tale particella ha 4-impulso:

$$p_{12} = p_1 + p_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad (2.8)$$

e quadrato della massa data da:

$$M_{12}^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \quad (2.9)$$

M_{12} non è costante, ma varierà tra i limiti cinematici imposti dalla conservazione del 4-impulso. Risolvendo le (2.6) e (2.7) per la particella 3, si ottiene:

$$M_{12}^2 = (M - \epsilon_3)^2 - \mathbf{p}_3^2 = M^2 + m_3^2 - 2M\epsilon_3$$

e quindi:

$$\epsilon_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - M_{12}^2}{2M}. \quad (2.10)$$

Al variare di M_{12} , ϵ_3 assumerà valori diversi. Vogliamo di seguito trovare i valori estremi di ϵ_3 (si noti che tali considerazioni si possono applicare a qualsiasi particella, permutando opportunamente 1, 2 e 3).

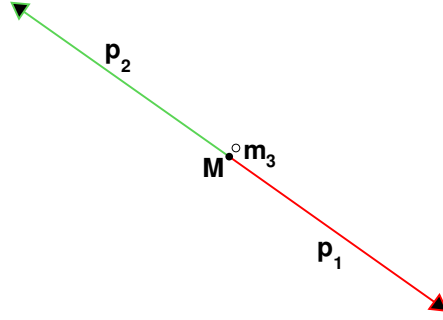


Figura 2.3: Decadimento in tre corpi nel sistema del **CM**, nel caso ϵ_3 minimo. Si noti che la particella 3 è prodotta ferma.

2.3.1 Energia minima

Il valore minimo di ϵ_3 è ovvio. Infatti, questo si realizza quando la particella 3 è emessa a riposo (fig. 2.3). Questa configurazione è *cinematicamente ammissibile* come si può riconoscere sostituendo i valori:

$$(\epsilon_3)_{min} = m_3 \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{p}_3)_{min} = 0 \quad (2.12)$$

nelle equazioni (2.6) e (2.7).

In questo caso M_{12} si può ricavare da (2.10) e vale quindi:

$$M_{12} = M - m_3,$$

come può facilmente attendersi.

Possiamo anche calcolare quanto vale $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$, relativo a questa configurazione:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad , \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 = M - m_3.$$

Si ricava:

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{[(M - m_3)^2 - (m_1 + m_2)^2][(M - m_3)^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4(M - m_3)^2}$$

ed è quindi del tutto equivalente al caso $(M - m_3) \rightarrow m_1 + m_2$.

2.3.2 Energia massima

Come si può dedurre dalla (2.10) il valore massimo di ϵ_3 si ha in corrispondenza di massa invariante (1,2), M_{12} , minima, la quale risulta dalla (2.9):

$$M_{12}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(\epsilon_1 \epsilon_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2). \quad (2.13)$$

È facile verificare che il termine fra parentesi non può essere negativo oppure nullo ma, al minimo, vale $m_1 m_2$, per cui dalla (2.13) si ha:

$$M_{12}^2 \geq (m_1 + m_2)^2.$$

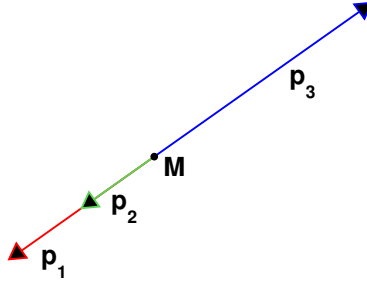


Figura 2.4: Decadimento in tre corpi nel sistema del **CM**, nel caso ϵ_3 massimo.

L'uguaglianza stretta si ha quando:

$$\mathbf{p}_1/\epsilon_1 = \mathbf{p}_2/\epsilon_2, \quad (2.14)$$

cioe' quando 1 e 2 si muovono, nella stessa direzione, con la stessa velocità (vedi fig. 2.4):

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta. \quad (2.15)$$

Infatti sostituendo la (2.14) nella espressione fra parentesi della (2.13) si ottiene:

$$\epsilon_1\epsilon_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \epsilon_1\epsilon_2 - \beta_1\epsilon_1\beta_2\epsilon_2 = \epsilon_1\epsilon_2(1 - \beta^2) = m_1\gamma m_2\gamma/\gamma^2 = m_1m_2,$$

dove si è indicato con $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$, il fattore di Lorentz corrispondente alla (2.15).

Quindi la configurazione che ha il massimo di ϵ_3 si ottiene sostituendo l'espressione $M_{12}^2 = (m_1 + m_2)^2$ nella (2.10):

$$(\epsilon_3)_{max} = \frac{M^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M} \quad (2.16)$$

2.3.3 Esempi

Nel caso di decadimenti in tre corpi non è possibile, come nella sezione precedente, calcolare lo spettro, sulla base degli argomenti fin qui sviluppati. Infatti, la forma dello spettro dipende dalla densità degli stati, che verrà discussa in seguito. Vogliamo qui calcolare i soli limiti cinematici di tali spettri in alcuni casi particolari.

1. *Decadimento* $\beta : n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

Vogliamo calcolare, nel **CM** (sistema di riposo del neutrone), l'intervallo di energia permesso per l'elettrone (la particella β^- che viene misurata). Poniamo¹ $M = m_n = 939.56 \text{ MeV}/c^2$, $m_1 = m_\nu = 0$, $m_2 = m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$, $m_3 = m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$. Dalle (2.11) e (2.16) si ottiene:

$$(\epsilon_e)_{min} = m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

$$(\epsilon_e)_{max} = \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} \simeq \frac{m_n - m_p}{2} \left(1 + \frac{m_p}{m_n}\right) \simeq m_n - m_p \simeq 1.3 \text{ MeV}$$

¹Si noti che nel caso del decadimento β è necessario usare i valori accurati delle masse di protone e neutrone, perché nel calcolo entra la differenza dei loro quadrati e quindi tali valori non possono essere considerati uguali, come in molti degli esempi cinematici finora visti.

2. *Decadimento del muone:* $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$.

I limiti cinematici dell'energia del positrone, nel sistema di riposo del muone, sono ($M = m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$, $m_1 = m_2 = m_\nu = 0$, $m_3 = m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$):

$$(\epsilon_e)_{\min} = m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

$$(\epsilon_e)_{\max} = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \simeq \frac{m_\mu}{2} \simeq 52.8 \text{ MeV}$$

3. *Decadimento dell' ω in tre pioni:* $\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$.

I limiti cinematici dell'energia di un qualsiasi pione (nell'ipotesi di non differenziare le masse tra carichi e neutri), nel sistema di riposo dell' ω , sono ($M = m_\omega = 782 \text{ MeV}/c^2$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$):

$$(\epsilon_\pi)_{\min} = m_\pi = 140 \text{ MeV}$$

$$(\epsilon_\pi)_{\max} = \frac{m_\omega^2 - 3m_\pi^2}{2m_\omega} \simeq 353 \text{ MeV}$$

2.4 Lo spazio delle fasi

Nel decadimento in tre corpi abbiamo trovato i limiti cinematici nello spettro di una delle particelle che decadono. Ma quale sarà la distribuzione di tale energia tra questi due estremi? Tale distribuzione sarà diversa a seconda dei casi, in considerazione del “numero” dei possibili stati disponibili per il decadimento. La fig. 2.5 mostra gli spettri di energia nei tre casi illustrati negli esempi illustrati in 2.3.3. La cinematica ci aiuta anche in questi casi a calcolare quale è lo spettro atteso. Per far questo dobbiamo introdurre il concetto di *spazio delle fasi*, che determina qualsiasi distribuzione (angolare, di impulso, di massa combinata, etc.), in assenza di ulteriori effetti dinamici.

2.4.1 Lo spazio delle fasi in MQNR

Nel caso generale di F particelle nello stato finale, a causa della conservazione dell'impulso, solo $F-1$ impulsi sono indipendenti (in quanto $\mathbf{p}_F = -\sum_{j=1}^{F-1} \mathbf{p}_j$). Possiamo rappresentare un possibile stato come un raggio vettore di uno spazio $3(F-1)$ -dimensionale. Un esempio è dato dal caso in cui $F=2$: in questo caso un possibile stato è rappresentato da un vettore $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ di uno spazio (p_x, p_y, p_z) . Uno stato cinematicamente possibile non è però un qualunque vettore dello spazio degli impulsi $3(F-1)$ -dimensionale: infatti, tra tutti i vettori bisogna prendere i soli per cui è *soddisfatta la conservazione dell'energia*. Questo vincolo fa sì che la punta del generico vettore è costretto a stare su una iper-superficie dello spazio $3(F-1)$ -dimensionale, che rappresenta il luogo dei punti in cui l'energia si conserva. La fig. 2.6 mostra, nel caso del decadimento in due corpi $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ (nel sistema di riposo della Λ), proprio tale superficie, che, come nel caso di tutti i decadimenti in due corpi, è una superficie sferica dello spazio 3-dimensionale, di raggio dato dalla (1.15).

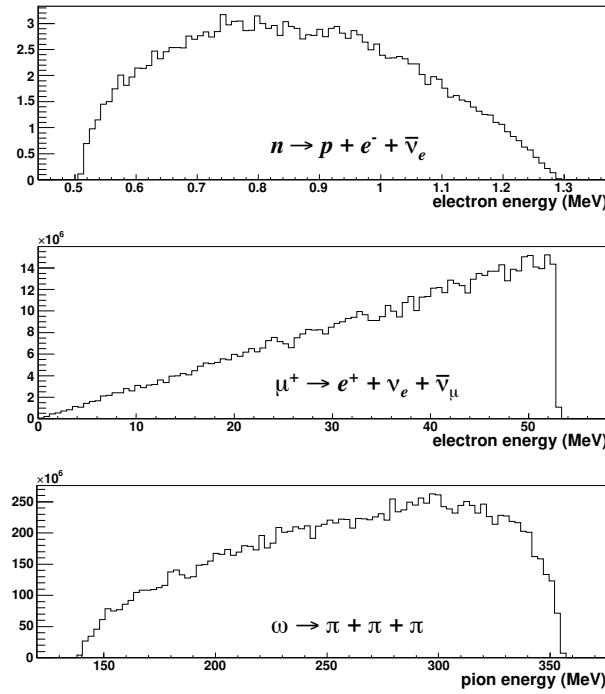


Figura 2.5: Spettri di decadimento in tre corpi nel sistema del **CM**, calcolati sulla base del solo spazio delle fasi, per i casi trattati in 3.3. Gli spettri sono calcolati numericamente utilizzando il programma GENBOD (*N-Body Monte-Carlo Event Generator*, CERN Program Library, W515).

In generale, nello spazio degli impulsi $3(F-1)$ -dimensionale, l'iper-superficie σ_E la cui equazione è:

$$\sigma_E : \quad \sum_{k=1}^F \epsilon_k(\mathbf{p}_k, m_k) = E \quad (2.17)$$

è una superficie chiusa e si può quindi definire il dominio τ_E in essa contenuto e calcolarne il volume. Questo è dato da:

$$V_p(F, E) = \int_{\tau_E} \prod_{j=1}^{F-1} d^3 p_j \quad (2.18)$$

Va notato che l'equazione (2.17) rappresenta solo funzionalmente la conservazione dell'energia, ma il valore E , a destra dell'espressione, può in generale essere qualsiasi e non necessariamente corrispondere ad un caso fisico. Quando E assume il valore del caso fisico che stiamo considerando ($E = E^* = M$), solo allora essa rappresenterà la conservazione dell'energia.

Come è noto dalla *MQNR*, il numero degli stati di una particella con impulso in modulo minore di p_0 è dato da:

$$N = \frac{V \times 4/3 \pi p_0^3}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.19)$$

dove V è il volume di normalizzazione ($= L^3$, nel caso di una scatola cubica di lato L), mentre il denominatore rappresenta il volume dello spazio delle fasi occupato da uno

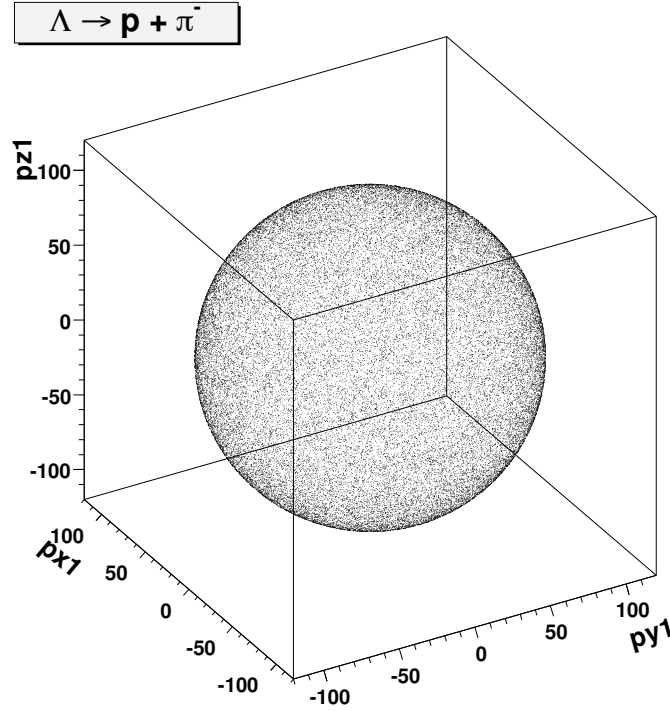


Figura 2.6: Distribuzione delle componenti dell'impulso del pione nel decadimento $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ ottenute dallo spazio delle fasi (programma GENBOD).

stato quantico. Generalizzando la (2.19), il numero di stati di un sistema di F particelle contenuti nel volume τ_E sarà quindi:

$$N(E) = \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{F-1} \times V_p(F, E). \quad (2.20)$$

La densità degli stati è quindi definita come:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} \quad (2.21)$$

e nell'espressione (2.1) va calcolata per quel valore di E nella (2.17) per cui $E = M$, cioè alla conservazione dell'energia.

2.4.2 Il sistema a due corpi

Come esempio di applicazione della precedente formulazione calcoliamo lo *spazio delle fasi nel sistema a due corpi* nel **CM**. Dalla (2.20) segue:

$$N(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \times \int_{\tau_E} d^3p_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{|\mathbf{p}_1|} |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1|, \quad (2.22)$$

dove si è indicato con $\mathbf{p}_1$ l'impulso di una delle due particelle nello stato finale, essendo il secondo impulso, nel **CM**, completamente determinato dalla (2.2). La densità degli stati sarà quindi (2.21):

$$\rho(E) = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \frac{d}{dE} \frac{|\mathbf{p}_1|^3}{3} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} |\mathbf{p}_1|^2 \frac{d|\mathbf{p}_1|}{dE}.$$

Poiché la formulazione dello spazio delle fasi fin qui data è valida nel caso non-relativistico, riscriviamo la (2.17) nel limite classico:

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = E. \quad (2.23)$$

L'energia E , in questa espressione, deve intendersi come *energia cinetica* e non energia totale.

Quindi, da

$$\frac{dE}{d|\mathbf{p}_1|} = \frac{d}{d|\mathbf{p}_1|} \left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} \right) = \frac{|\mathbf{p}_1|}{m_1},$$

si ottiene infine

$$\rho(E) = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \mathbf{p}_1^2 \frac{m_1}{|\mathbf{p}_1|}.$$

L'espressione della densità degli stati degli stati da utilizzare in (2.1) è allora:

$$[\rho(E)]_{E_f=E_i} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} [|\mathbf{p}_1| m_1]_{|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_f|} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} |\mathbf{p}_f| m_1, \quad (2.24)$$

essendo $|\mathbf{p}_f|$ il valore di $|\mathbf{p}_1|$ che soddisfa la conservazione dell'energia. Indicando con E_i l'*energia cinetica totale iniziale*, la conservazione dell'energia si ottiene sostituendo E_i nella (2.23). Sostituendo ancora la (2.2) in (2.23) si ottiene infine il risultato ben noto in Meccanica Classica:

$$|\mathbf{p}_f| = \sqrt{2E_i \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (2.25)$$

2.4.3 Applicazione: la sezione d'urto di Born

Questa densità degli stati può essere utilizzata per ricavare l'espressione della sezione d'urto tramite la (2.1).

Scriviamo la reazione come: $A + B \rightarrow 1 + 2$. Sia A il proiettile di massa m_A ed impulso $\mathbf{p}_A$, B il bersaglio fermo (cioè $\mathbf{p}_B = 0$). Assumiamo che $m_1 = m_A$ e $m_2 = m_B$. Vogliamo calcolare la sezione d'urto nel caso che la massa del bersaglio sia molto grande, cioè ne limite $m_B \rightarrow \infty$, in modo tale che il caso possa trattarsi come quello di *scattering da potenziale*.

In queste condizioni si ha:

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_f| = \sqrt{2E_A m_A} = |\mathbf{p}_A|,$$

cioè siamo nel caso di uno *scattering elastico*: cambia solo la direzione dell'impulso iniziale, ma non il suo modulo.

La sezione d'urto è uguale alla probabilità di transizione per unità di tempo (2.1) divisa per il flusso di particelle incidenti:

$$d\sigma = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{\Phi} \frac{[s^{-1}]}{[cm^{-2}s^{-1}]}. \quad (2.26)$$

Il flusso incidente è uguale al prodotto della densità di particelle nello stato iniziale ($1/V$) per la velocità della particella incidente:

$$\Phi = \frac{|\mathbf{v}_A|}{V} = \frac{|\mathbf{p}_A|}{m_A V} = \frac{|\mathbf{p}_f|}{m_1 V}.$$

$dw_{i \rightarrow f}$ è la probabilità di transizione, per unità di tempo, per particelle diffuse in $d\Omega$. Per ottenerla basta riprendere la (2.22), prima che sia integrata in $d\Omega$:

$$dN = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega \int_0^{p_1} \mathbf{p}'_1{}^2 d|\mathbf{p}'_1|.$$

Quindi:

$$\left[\frac{d\rho}{d\Omega} \right]_{E_f=E_i} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} |\mathbf{p}_f| m_1.$$

Sostituendo questa espressione in (2.26) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} |\mathbf{p}_f| m_1 \times \frac{m_1 V}{|\mathbf{p}_f|} = \\ &= \left(\frac{m_1}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 V^2, \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{M}_{fi} = \int \Psi_f^* U(\mathbf{r}) \Psi_i d^3r,$$

essendo $U(\mathbf{r})$ il *potenziale di scattering*. Nell'*approssimazione di Born delle onde piane*, gli stati iniziale e finale prendono la forma:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right), \\ \Psi_f &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

Indicando con $\mathbf{q} = \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_1$ l'impulso trasferito, si ottiene la formula della *sezione d'urto di Born*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m_1}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \int \exp\left(\frac{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) U(\mathbf{r}) d^3r \right|^2.$$

2.4.4 Un modo alternativo di definire lo spazio delle fasi in MQNR

È anche possibile definire la densità degli stati dello spazio delle fasi in modo formale, facendo uso della funzione delta di Dirac. Vedremo, in particolare, che questa definizione meglio si presta ad una estensione nel caso relativistico ed, infatti, è correntemente usata nei testi di Fisica delle Particelle Elementari [2, 3]. Per un sistema di F particelle nel **CM**, la densità degli stati è definita come:

$$\rho^{(F)}(E) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \int \frac{V d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{V d^3p_2}{(2\pi\hbar)^3} \cdots \int \frac{V d^3p_F}{(2\pi\hbar)^3} \times \delta\left(E_i - \sum_{k=1}^F \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m_k}\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{k=1}^F \mathbf{p}_k\right) \quad (2.27)$$

In questa espressione abbiamo omesso la condizione $E_f = E_i$, essendo questa esplicita nelle funzioni di Dirac, le quali hanno proprio la funzione di garantire la conservazione dell'energia (la prima) e dell'impulso. L'apice F viene ulteriormente inserito per ricordare che ci stiamo riferendo al caso di F particelle nello stato finale. Possiamo facilmente vedere come la (2.27) sia del tutto equivalente alle (2.21,2.20,2.18). Per fare questo limitiamoci al caso di $F = 2$, già esaminato nel paragrafo precedente:

$$\rho^{(2)}(E) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \int \frac{V d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{V d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left(E_i - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2). \quad (2.28)$$

L'integrale in $d^3 p_1$ nella (2.28) si può svolgere sfruttando la seguente proprietà della funzione di Dirac:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - \alpha_i)}{\left| \frac{df}{dx}(\alpha_i) \right|}, \quad (2.29)$$

dove la somma va estesa al numero di radici α_i dell'equazione $f(x) = 0$ (cioè $f(\alpha_i) = 0$). Nel nostro caso specifico la (2.29) diventa:

$$\delta \left(E_i - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} \right) = \delta(|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_f|) \frac{m_1}{|\mathbf{p}_1|},$$

dove $|\mathbf{p}_f|$ rappresenta la radice in $|\mathbf{p}_1|$ dell'equazione:

$$E_i - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}.$$

Sostituendo questa espressione nella (2.28), si ottiene infine:

$$\rho^{(2)}(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int \mathbf{p}_1^2 d|\mathbf{p}_1| \delta(|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_f|) \frac{m_1}{|\mathbf{p}_1|} \int d^3 p_2 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2).$$

Poiché si ha

$$\int d^3 p_2 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 1,$$

in quanto $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$, si ottiene infine:

$$\rho^{(2)}(E) = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} |\mathbf{p}_f| m_1,$$

che è appunto identica alla (2.24).

2.4.5 Lo spazio delle fasi invariante

Nella teoria delle perturbazioni relativistica è anche possibile dare un'espressione simile alla regola d'oro di Fermi. In questo caso si usano, per la sezione d'urto di reazione ($A + B \rightarrow 1 + 2 + \dots F$) e per la rate di decadimento ($A \rightarrow 1 + 2 + \dots F$), le seguenti formule [2, 3]:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{\Phi} dLips = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4[(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2]^{1/2}} dLips \quad (2.30)$$

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_A} dLips, \quad (2.31)$$

dove con $\mathcal{M}$ si è indicata l'*ampiezza di transizione invariante*, calcolata mediante le *regole di Feynman*, mentre con $dLips$ ($=$ *Lorentz Invariant Phase Space*) viene rappresentato l'elemento di *spazio delle fasi invariante*, cioè l'equivalente invariante relativistico dell'integrando che appare nell'espressione (2.27). Come si può vedere l'analogia tra le espressioni relativistiche e le (2.26,2.1) è davvero notevole.

L'elemento di spazio delle fasi invariante, consistente con tali espressioni, è (si noti: $\hbar = c = 1$):²

$$dLips = dR^{(F)} = (2\pi)^4 \frac{V d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\epsilon_1} \frac{V d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\epsilon_2} \cdots \frac{V d^3 p_F}{(2\pi)^3 2\epsilon_F} \times \delta^{(4)} \left(p_i - \sum_{k=1}^F p_k \right), \quad (2.32)$$

dove p_i rappresenta il 4-impulso iniziale ($= p_A + p_B$ nel caso di reazione, oppure $= p_A$ nel caso di decadimento). Si può riconoscere che tale definizione è l'estensione relativistica della (2.27): infatti, i differenziali moltiplicativi sono gli stessi con la sola aggiunta dei fattori $1/(2\epsilon_k)$, derivanti dalla diversa normalizzazione in Meccanica Quantistica Relativistica [2, 3] al fine di rendere il volume di normalizzazione Lorentz-invariante, mentre le due delta della (2.27) vengono contratte nell'unica $\delta^{(4)}$ del 4-impulso.

2.4.6 Il sistema a due corpi nel caso relativistico

Come nel caso non relativistico calcoliamo l'elemento di spazio delle fasi *invariante* nel caso di due soli corpi nello stato finale. In questo caso la (2.32) diventa nel **CM** ($p_i = (M, \mathbf{0})$):

$$\begin{aligned} dR^{(2)} &= (2\pi)^4 \frac{V d^3 p_1}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2}} \frac{V d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2}} \times \delta^{(4)}(p_i - p_1 - p_2) = \\ &= \left(\frac{V}{4\pi} \right)^2 \frac{d^3 p_1}{\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2}} \frac{d^3 p_2}{\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2}} \delta^{(3)}(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(M - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2}). \end{aligned}$$

Integrando, si elimina $\mathbf{p}_2$ in quanto $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ e si ottiene:

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= \left(\frac{V}{4\pi} \right)^2 \int \frac{\delta(M - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_2^2})}{\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_2^2}} d^3 p_1 = \\ &= \frac{V^2}{4\pi} \int \frac{\delta(M - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_2^2})}{\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_2^2}} \mathbf{p}_1^2 d|\mathbf{p}_1|. \end{aligned}$$

Definendo $E(|\mathbf{p}|) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_1^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_2^2}$ ($E(|\mathbf{p}_1|) = M$ rappresenta la conservazione dell'energia), si ha:

$$\frac{dE}{E} = \frac{|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2}},$$

²Bisogna osservare che nei testi di Fisica delle Particelle Elementari si trovano espressioni spesso differenti sia per le formule (2.30) e (2.31) sia per lo spazio delle fasi invariante. La cosa importante è che ci sia consistenza tra l'espressione della grandezza fisica (ad es., sezione d'urto) e quella dello spazio delle fasi. Altre differenze possono esserci a seguito delle differenti possibili normalizzazioni (ad es., $\sqrt{m/\epsilon}$, $1/\sqrt{2\epsilon}$,...) dei campi fermionici e bosonici.

per cui

$$R^{(2)} = \frac{V^2}{4\pi} \int \frac{|\mathbf{p}_1|}{E} \delta(M - E) dE = \frac{V^2}{4\pi} \frac{|\mathbf{p}_f|}{M},$$

essendo $|\mathbf{p}_f|$ la soluzione dell'equazione $E(|\mathbf{p}_1|) = M$. La soluzione è già nota ed è data dalla (2.5) e quindi si ha, per due particelle nello stato finale:

$$R^{(2)} = \frac{V^2}{8\pi} \frac{\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}}{M^2}.$$

Nel caso in cui occorra l'espressione differenziale dello spazio delle fasi invariante, questa è data da:

$$\frac{dR^{(2)}}{d|\mathbf{p}_1|d\Omega} = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^2 \frac{|\mathbf{p}_1|}{M} \delta(|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_f|)$$

Bibliografia

- [1] Vedi ad es., J. J. Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna*, Zanichelli, 1996, Par. 5.6
- [2] I. J. R. Aitchinson and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, Adam Hilger, 1989, Par. 5.4.
- [3] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, J. Wiley and sons, 1984, Par. 4.3.