

Sezioni d'urto

Prof. Sergio Petrerà
Università degli Studi dell'Aquila

11 giugno 2008

1 La regola d'oro di Fermi e la sezione d'urto di Born

La *regola d'oro di Fermi* si ricava in Meccanica Quantistica Non Relativistica (MQNR) dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo:

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot [\rho(E)]_{E_f}. \quad (1)$$

$\rho(E)$ è la densità degli stati finali. $\mathcal{M}_{fi}$ viene detto *elemento di matrice* o *ampiezza di transizione* e viene scritto, in modo formale oppure nello spazio delle coordinate, come:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle f | U(\mathbf{r}) | i \rangle = \int \Psi_f^* U(\mathbf{r}) \Psi_i d^3r,$$

essendo $U(\mathbf{r})$ il *potenziale di scattering*.

Scriviamo la reazione come $m + M \rightarrow m + M$. Sia m il proiettile (di massa m ed impulso $\mathbf{p}$), M il bersaglio (di massa M ed impulso $\mathbf{p}_0$), assunto fermo (cioè $\mathbf{p}_0 = 0$). Dopo l'urto le masse rimangono rispettivamente uguali, mentre gli impulsi saranno $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{p}'_0$. Vogliamo calcolare la sezione d'urto nel caso che la massa del bersaglio sia molto grande, cioè nel limite $M \rightarrow \infty$, in modo tale che il caso possa trattarsi come quello di *scattering da potenziale*.

In queste condizioni si ha:

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = \sqrt{2mE} \quad , \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}'_0 = 0$$

cioè siamo nel caso di uno *scattering elastico*: cambia solo la direzione dell'impulso iniziale, ma non il suo modulo.

La sezione d'urto è uguale alla probabilità di transizione per unità di tempo (1) divisa per il flusso di particelle incidenti:

$$d\sigma = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{\Phi} \quad \frac{[s^{-1}]}{[cm^{-2}s^{-1}]}. \quad (2)$$

Il flusso incidente è uguale al prodotto della densità di particelle nello stato iniziale ($1/V$) per la velocità della particella incidente:

$$\Phi = \frac{|\mathbf{v}|}{V} = \frac{|\mathbf{p}|}{mV}.$$

$dw_{i \rightarrow f}$ è la probabilità di transizione, per unità di tempo, per particelle diffuse in $d\Omega$. Questa è data da:

$$d^2 N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega p'^2 dp'. \quad (3)$$

Quindi:

$$\left[\frac{d\rho}{d\Omega} \right]_{E_f} = \frac{d^2 N}{dE_f d\Omega} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} |\mathbf{p}| m.$$

Sostituendo questa espressione in (2) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} |\mathbf{p}| m \times \frac{mV}{|\mathbf{p}|} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 V^2. \end{aligned}$$

Nell'approssimazione di Born delle onde piane, gli stati iniziale e finale prendono la forma:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}, \\ \Psi_f &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}. \end{aligned}$$

Indicando con $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ l'impulso trasferito, si ottiene la formula della *sezione d'urto di Born*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \int e^{i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}} U(\mathbf{r}) d^3 r \right|^2. \quad (4)$$

2 La sezione d'urto di Rutherford

Come primo esempio di processo elementare consideriamo la diffusione di una particella di carica ze , massa m , impulso p e spin 0 da un potenziale coulombiano generato da una carica Ze , massa M e spin 0. Sia $p \ll mc$ e $M \gg m$. In queste condizioni è possibile usare l'espressione (4) per la sezione d'urto, usando per il potenziale (N.B. si tratta di un'energia potenziale):

$$U(\mathbf{r}) = U(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (5)$$

L'ampiezza di transizione:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}} \frac{1}{r} d^3 r \quad (6)$$

risulta indefinita in quanto è l'integrale di una funzione oscillante esteso all'infinito. L'integrale può invece essere limitato considerando che, in realtà, il potenziale non si estende all'infinito, ma è schermato dagli elettroni atomici. Pertanto il potenziale (5) viene riscritto come:

$$U(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (7)$$

dove il termine esponenziale rappresenta la funzione di schermo con $\mu \sim 1/R_A$, R_A essendo il raggio atomico. Date le dimensioni in oggetto si ha che la funzione di schermo

risulta diversa da 1 solo per distanze dell'ordine o maggiori di quelle atomiche. Quindi l'introduzione dello schermo non cambia l'integrale all'interno del raggio atomico, ma produce un rapido decadimento al di fuori.

Con questo cambiamento l'ampiezza di transizione l'integrale diventa ($\mathbf{k} = \mathbf{q}/\hbar$):

$$\begin{aligned} \int e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{e^{-\mu r}}{r} d^3 r &= \int e^{ikr \cos \theta} \frac{e^{-\mu r}}{r} r^2 dr d\cos \theta d\phi = \\ &= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty [e^{-(\mu - ik)r} - e^{-(\mu + ik)r}] dr = \frac{2\pi}{ik} \left(\frac{1}{\mu - ik} - \frac{1}{\mu + ik} \right) = \frac{4\pi}{k^2 + \mu^2} \end{aligned}$$

Per impulsi trasferiti

$$q \gg \hbar\mu \sim \frac{\hbar}{R_A} = \frac{\hbar c}{R_{Ac}} \sim \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{10^5 \text{ fm} \cdot c} = 2 \text{ keV}/c$$

il termine μ^2 può essere trascurato e pertanto la sezione d'urto diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \right)^2 = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{2m}{q^2} \right)^2. \quad (8)$$

Poiché sotto le ipotesi fatte all'inizio l'impulso trasverso si può semplicemente scrivere $q = 2p \sin \theta/2$, si ottiene infine:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 p v} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (9)$$

3 La sezione d'urto di Rutherford per una distribuzione estesa di carica

Si consideri il caso di una distribuzione estesa di carica $\rho(\mathbf{r})$. Sia $\rho(\mathbf{r})$ normalizzata in modo che:

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3 r = Z e$$

Il potenziale (7) può allora essere riscritto nel seguente modo:

$$U(r) = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} e^{-\mu r} \int \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3 R,$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio o, comunque, ad una regione in cui la densità è diversa da zero.

L'ampiezza di transizione per una carica *estesa* si scrive allora:

$$[\mathcal{M}_{fi}]_E = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 V} \int \int \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} e^{-\mu r} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 R d^3 r$$

Supponendo che le dimensioni lineari dell'estensione della carica siano piccole rispetto a quelle definite dall'inverso del parametro μ (cioè $R_N \ll R_A$) e definendo il vettore $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$, si ha:

$$e^{-\mu r} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \simeq e^{-\mu s} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{M}_{fi}]_E &= \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} \frac{e^{-\mu s}}{s} d^3 s \int \rho(\mathbf{R}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d^3 R = \\
&= \left[\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} \frac{e^{-\mu s}}{s} d^3 s \right] \times \left[\frac{1}{Z} \int \rho(\mathbf{R}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d^3 R \right] = [\mathcal{M}_{fi}]_P \times F,
\end{aligned}$$

dove con $[\mathcal{M}_{fi}]_P$ abbiamo indicato l'ampiezza di transizione definita dalla (6), cioè corrispondente ad una carica *puntiforme* Ze . F come si vede è funzione dell'angolo θ (che appare nel prodotto scalare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}$), ma si usa comunemente scriverla come funzione di q^2 . D'altro canto abbiamo visto nel paragrafo precedente che esiste una relazione biunivoca tra q e θ , a definito impulso della particella incidente, tramite la

$$q = 2 p \sin \frac{\theta}{2}$$

Si ottiene pertanto il seguente risultato generale:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_E = |F(q^2)|^2 \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_P \quad (10)$$

cioè *la sezione d'urto dovuta ad un potenziale la cui sorgente sia estesa è uguale a quella dovuta ad un potenziale con la stessa sorgente puntiforme, moltiplicata per il modulo quadro di una funzione (in generale) complessa dell'impulso trasferito quadro*. Tale funzione è nota come *fattore di forma* ed è proporzionale alla trasformata di Fourier della distribuzione che descrive la sorgente estesa. Nel caso specifico trattato, quello del potenziale coulombiano in cui tale distribuzione è data dalla densità di carica, il *fattore di forma elettrico* è:

$$F(q^2) = \frac{1}{Z} \int e^{i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}} \rho(\mathbf{r}) d^3 r \quad (11)$$

4 La sezione d'urto di Rutherford relativistica

Consideriamo di nuovo il caso dello scattering da potenziale coulombiano puntiforme, caso che ci ha portato alla sezione d'urto di Rutherford. Si noti però che tale formula è stata ottenuta nel limite classico, cioè per $v \ll c$. Lasciamo tutte le ipotesi invariate (M fermo, con $M \gg m$, e spin 0 per entrambe le particelle) particelle in oggetto). Assumiamo invece che la particella incidente abbia $E \gg mc^2$, essendo questo il caso di maggiore interesse fisico negli esperimenti sulla struttura dei nuclei (as es. diffusione elastica di elettroni). Nel riferimento in cui M è inizialmente in quiete i quadrimpulsi che rappresentano il sistema sono, per lo *stato iniziale*:

$$P = \{E, \mathbf{p}\} \quad , \quad P_0 = \{M, \mathbf{0}\}$$

e per lo *stato finale*:

$$P' = \{E', \mathbf{p}'\} \quad , \quad P_0 = \{E'_0, \mathbf{p}'_0\}$$

Si noti che abbiamo usato la convenzione $c = 1$.

La conservazione del quadrimpulso si esprime:

$$P + P_0 = P' + P'_0$$

Il quadrimpulso trasferito è definito come:

$$q = P - P' = P'_0 - P_0$$

e per le sue componenti si usano le notazioni , $q = \{\nu, \mathbf{q}\}$, con

$$\nu = E - E' = E'_0 - M \quad , \quad \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{p}'_0$$

$\mathbf{q}$ è il (3-)vettore impulso trasferito già incontrato nei precedenti paragrafi. La norma (modulo quadro) del quadrimpulso trasferito è di tipo spazio (*space-like*) :

$$q^2 = P^2 + P'^2 - 2PP' = 2m^2 - 2EE' + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \approx -2EE'(1 - \cos\theta) \approx -4pp' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (12)$$

q^2 può anche essere calcolato in funzione delle variabili del nucleo bersaglio:

$$q^2 = P_0'^2 + P_0^2 - 2P_0'P_0 = 2M^2 - 2ME'_0 \quad (13)$$

Lo scattering è *elastico* quando $E'_0 \approx M$. In realtà E'_0 è dato da:

$$E'_0 = M - \frac{q^2}{2M} = M + \nu \quad (14)$$

quindi lo scattering elastico si ha per $\nu \approx 0$. Uguagliando (12) e (13) si ha:

$$-4pp' \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2M(M - E'_0) = 2M(E' - E) \simeq 2M(p' - p)$$

da cui si ottiene:

$$p' = \frac{p}{1 + (2p/M) \sin^2 \theta/2} \quad (15)$$

che è la stessa relazione che si ottiene per l'effetto Compton.

Per calcolare la sezione d'urto di Rutherford nel caso relativistico, basta ricalcolare la densità degli stati finali (l'ampiezza di transizione è la stessa calcolata nel caso non relativistico). Dalla (3) si ha:

$$\left[\frac{d\rho}{d\Omega} \right]_{E_f} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} p'^2 \frac{dp'}{dE_f}.$$

Ma, usando le (14) e (15):

$$E_f = E' + E'_0 \approx p' + M + \frac{2pp' \sin^2 \theta/2}{M}$$

e quindi:

$$\frac{dE_f}{dp'} = 1 + \frac{2p \sin^2 \theta/2}{M} = \frac{p}{p'}$$

C'è infine da osservare che se c non viene omissso (con $c = 1$), appare nell'ultima espressione, un ulteriore c a denominatore. Quindi, si ha per la sezione d'urto (ultra-)relativistica di Rutherford (tra particelle di spin 0):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p'^2}{c} \left(\frac{p'}{p}\right) \frac{V}{c} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{4\pi\hbar^2}{\mathbf{q}^2}\right)^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p'^2}{c^2} \left(\frac{p'}{p}\right).$$

Si noti che nell'espressione del flusso si è usata c per la velocità. Osservando che nel caso elastico si ha $\mathbf{q}^2 = -q^2$, sostituendo la (12) nell'espressione precedente, si ottiene infine:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 pc}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} \left(\frac{p'}{p}\right). \quad (16)$$